

dc pam4

支配方程式系の定式化

地球流体電脳倶楽部

2008年06月24日 (dc pam4-20080624-1)

目次

第 1 章	この文書について	1
1.1	この文書について	1
第 2 章	力学過程の支配方程式系の導出	2
2.1	設定	2
2.2	基礎方程式系の導出	2
2.2.1	状態方程式	3
2.2.2	連続の式	3
2.2.3	水蒸気の式	3
2.2.4	運動方程式	4
2.2.5	熱力学の式	4
2.3	回転系への変換	6
2.3.1	スカラーの変換公式	6
2.3.2	ベクトルの変換公式	6
2.3.3	回転系への変換	7
2.4	球座標への変換	8
2.4.1	直交曲線座標系における微分	8
2.4.2	球座標系における微分	8
2.4.3	球座標への変換	9
2.5	z -座標プリミティブ方程式	10
2.5.1	静力学平衡近似	10
2.5.2	薄い球殻近似	11
2.6	σ -座標プリミティブ方程式	11
2.6.1	σ -座標変換公式	11
2.6.2	σ -座標プリミティブ方程式系	12
2.6.3	境界条件	14
2.6.4	傾向方程式	15
2.7	モデル支配方程式	15
2.7.1	渦度方程式	15
2.7.2	発散方程式	17
2.7.3	熱力学の式	19
2.7.4	温度の基本場とずれの分離	20
2.7.5	支配方程式	21
2.8	参考文献	22
第 3 章	座標系・変換公式に関する解説	23

3.1	球面調和函数	23
3.1.1	定義と性質	23
3.1.2	球面調和函数の空間微分	27
3.1.3	コメント — 全波数について	27
3.1.4	グラフ	28
3.2	微分公式, GCM の変数の微分関係式	29
3.2.1	スカラー量の微分	29
3.2.2	ベクトル量の微分	29
3.2.3	発散	30
3.2.4	渦度	30
3.2.5	速度ポテンシャル, 流線関数と (u, v)	30
3.3	Legendre 函数 P_n の性質	30
3.3.1	多項式と Legendre 函数の積の積分	31
3.3.2	Legendre 函数の零点	31
3.4	積分評価	31
3.4.1	Gauss の台形公式	31
3.4.2	Gauss-Legendre の公式	33
3.5	球面調和函数の離散的直交関係	36
3.6	スペクトルの係数と格子点値とのやり取り	37
3.6.1	スペクトルの係数と格子点値との値のやり取り	38
3.6.2	スペクトルの係数と格子点値との値のやり取り ~ 東西微分編	38
3.6.3	スペクトルの係数と格子点値との値のやり取り ~ 南北微分編	39
3.6.4	χ, ψ のスペクトルの係数から速度の格子点値への変換	41
3.7	スペクトルの係数同士の関係	42
3.8	波数切断	42
3.8.1	波数切断の仕方	43
3.8.2	切断波数の決め方	44
3.9	スペクトルモデルと差分モデル	48
3.10	参考文献	49
第 4 章	使用上の注意とライセンス規定	50
4.1	ライセンス規定	50
4.2	使用上の注意	50
4.3	開発グループメンバー	51
4.3.1	2007 年度	51

第1章 この文書について

1.1 この文書について

この文書は, 地球流体電脳倶楽部で開発中の惑星大気モデル (Dennoh-Club Planetary Atmospheric Model) のバージョン 4 である dcpam4 の支配方程式系の定式化, および離散化の詳細について解説したものである.

第 2 章 力学過程の支配方程式系の導出

2.1 設定

dcpam4 では地球大気を想定し, 全大気はともに理想気体である乾燥空気および水蒸気から成る混合大気とする. 雲水量は無視する. また, 水蒸気量が全大気に占める割合は小さいと仮定し, 全大気の定圧比熱を乾燥大気の値で近似する.

水蒸気量の保存については, 凝結および蒸発による生成消滅を考慮する. しかし, この量が全大気に与える効果は小さいとし, 全大気の質量保存則, 運動エネルギー保存則, 全エネルギー保存則に影響を及ぼさないとする.

重力加速度は惑星中心に向いていると仮定する. また, 運動の水平スケールが鉛直スケールよりかなり大きい運動を想定し, 静力学平衡近似を行なう. さらに, 運動は惑星表面付近に限られることを仮定して近似を行なう.

2.2 基礎方程式系の導出

方程式系は 6 本の予報方程式と 1 本の診断方程式からなる. 予報方程式は, 全質量の連続の式, 水蒸気量の式, 運動方程式 (3 成分), 熱力学の式からなる. これらは, それぞれ, 全質量保存則, 水蒸気量の保存則, 全質量に関する運動量保存則, 全質量に関する全エネルギー保存則から導出する. 診断方程式には, 理想気体の状態方程式を用いる¹.

!! 注意: この付録中では導出の都合上, 乾燥空気の気体定数を R^d , 定圧比熱を C_p^d , 全大気の気体定数を R とおく. しかし, モデルの力学過程の実装について記した別紙『力学過程』では, 乾燥空気の気体定数を R , 定圧比熱を C_p と表記しているので留意いただきたい.

¹乾燥空気と水蒸気は, 同じ速度と温度をもつことを暗黙のうちに仮定している. したがって, 水蒸気に関する運動量保存則および全エネルギー保存則および状態方程式を考慮する必要がない.

2.2.1 状態方程式

乾燥空気, 水蒸気の状態方程式はそれぞれ

$$p^d = \rho^d R^d T, \quad (2.1)$$

$$p^v = \rho^v R^v T \quad (2.2)$$

である. ここで p は圧力, ρ は密度, R は気体定数, T は温度であり, \bullet^d, \bullet^v はそれぞれ乾燥空気および水蒸気に関する量であることを示す. したがって, 全圧 $p = p^d + p^v$ は,

$$\begin{aligned} p &= (\rho^d R^d + \rho^v R^v) T \\ &= \rho R^d (1 + \epsilon_v q) T \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる. ここで, $q = \rho^v / \rho$ は比湿, であり, $\epsilon_v \equiv 1/\epsilon - 1$, $\epsilon \equiv R^d/R^v$ である. したがって, 全大気の状態方程式は,

$$p = \rho R T. \quad (2.4)$$

ただし, $R \equiv R^d(1 + \epsilon_v q)$ である. あるいは, 仮温度 $T_v \equiv T(1 + \epsilon_v q)$ を用いれば,

$$p = \rho R^d T_v \quad (2.5)$$

と表される.

2.2.2 連続の式

全大気の状態方程式は, 水蒸気の生成消滅を無視すれば²,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0. \quad (2.6)$$

ここで, v は風速である. ラグランジュ形式で記述すれば,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.7)$$

2.2.3 水蒸気の式

水蒸気密度 ρ^v に対する質量保存則は, 単位時間単位体積あたりの生成消滅量を S とすれば,

$$\frac{\partial \rho^v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^v v_j) = S. \quad (2.8)$$

比湿 $q = \rho^v / \rho$ に関する式は, 原理的には (2.6) と (2.8) から得ることができる. しかし, 今の場合, (2.6) で水蒸気の生成消滅を無視したので, 正しくは得られない. そこで比湿の生成消滅に関する項を改めて S_q と定義する.

$$\frac{dq}{dt} = S_q. \quad (2.9)$$

²次で示すように水蒸気式では生成消滅を含めている. したがって, 全大気の状態方程式は, 水蒸気の生成消滅が起きても全質量が保存するように, 乾燥大気量が変化することを要請していることになる.

2.2.4 運動方程式

運動量保存則は、水蒸気の生成消滅にともなう運動量変化を無視すれば次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = \mathcal{F}'_i. \quad (2.10)$$

ここで、 σ_{ij} は粘性応力テンソル、 Φ^* は惑星の引力によるポテンシャル³、 \mathcal{F}'_i はその他の外力項である。あるいは連続の式を用いてラグランジュ形式で記述すると

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = \mathcal{F}'_i \quad (2.11)$$

となる。ここで、粘性項と外力項を \mathcal{F}_i とおき、さらにベクトル表示する。

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p + \rho \nabla \Phi^* = \mathcal{F}. \quad (2.12)$$

2.2.5 熱力学の式

単位質量あたりの全エネルギーは、運動エネルギー $v^2/2$ と内部エネルギー ε およびポテンシャルエネルギー Φ^* の和で表現される。この時間変化率の式は、水蒸気の生成消滅による影響を無視すれば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \Phi^* \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \Phi^* \right) v_j + p v_j - \sigma_{ij} v_i \right] = \rho Q + \mathcal{F}'_i v_i \quad (2.13)$$

である。ここで、 Q は外部からの加熱率である。一方、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和の保存式は、運動量保存式 (2.10) に v_i をかけ、連続の式を用いて変形することで得られる⁴。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 + \rho \Phi^* \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho v_j v_i^2 + \rho \Phi^* v_j + p v_j - \sigma_{ij} v_i \right) = p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \mathcal{F}'_i v_i. \quad (2.14)$$

³これは遠心力を考慮しない惑星の質量にのみ起因したポテンシャル。

⁴導出の過程を示す。左辺第 1 項と第 2 項は次のように変形される。

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i) &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i^2) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) - \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i^2) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \rho v_j \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} v_i^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} v_i^2 \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho v_j v_i^2 \right) + \frac{1}{2} v_i^2 \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho v_j v_i^2 \right). \end{aligned}$$

また、左辺第 5 項は次のように変形される。変形の際には $\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = 0$ であるとしている。

$$\begin{aligned} v_i \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} &= \Phi^* \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) \right\} + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + v_i \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi^*) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \Phi^* v_i). \end{aligned}$$

ここで、変形の際には $\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = 0$ であるとしている。(2.13) と (2.14) との差をとると、次のように内部エネルギーの式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon v_j) = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho Q. \quad (2.15)$$

連続の式を用いてラグランジュ形式に書き直せば

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) + \rho Q. \quad (2.16)$$

以降では、外部からの加熱の項と粘性による加熱の項をまとめて Q^* とおくこととする。

内部エネルギーを温度を用いて表現すると $\varepsilon = C_v T$ である。 C_v は定圧比熱である。さらに状態方程式 (2.4) を用いて (2.16) を変形する。 $C_p = C_v + R$ であることに注意すれば

$$\frac{dC_p T}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + Q^*, \quad (2.17)$$

となる。ここで、 C_p を乾燥空気の定圧比熱 C_p^d (定数) で近似すると⁵、次の熱力学の式を得る。

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p^d \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{C_p^d}. \quad (2.18)$$

⁵この近似には疑問が残る。状態方程式においては、気体定数 R を R^d とする近似は (仮温度 T_v を導入することで) 行なわなかった。 C_p についてだけ近似するのは近似のレベルに一貫性がないように思われる。

以下はその主張。混合比 $r = \rho^v / \rho^d$ を用いている。全大気の内エネルギーは

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon &= \rho^d \varepsilon^d + \rho^v \varepsilon^v \\ &= \rho^d C_v^d T + \rho^v C_v^v T \\ &= \rho \left(\frac{\rho^d C_v^d + \rho^v C_v^v}{\rho} \right) T \\ &= \rho \left(\frac{C_v^d + r C_v^v}{1+r} \right) T, \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$C_v \equiv \frac{C_v^d + r C_v^v}{1+r},$$

である。また、

$$R \equiv \frac{R^d + r R^v}{1+r} \left(= R^d \frac{1+r/\epsilon}{1+r} \right),$$

であるから、

$$\begin{aligned} C_p &= C_v + R \\ &= \frac{C_v^d + r C_v^v + R^d + r R^v}{1+r} \\ &= \frac{C_p^d + r C_p^v}{1+r} \\ &= C_p^d \frac{1+r C_p^v / C_p^d}{1+r} \\ &\sim C_p^d \frac{1+8r/7\epsilon}{1+r}, \end{aligned}$$

となる。ここで、 $C_p^d = (C_v^d + R^d) \sim (\frac{5}{2} R^d + R^d) = \frac{7}{2} R^d$ 、および $C_p^v = (C_v^v + R^v) \sim (3R^v + R^v) = 4R^v$ を用いた。熱力学の式では、この状況に対して、 $C_p \sim C_p^d$ と近似した。しかし、静力学平衡の式では、たった $8/7$ の違いなのに R を R^d に近似せず、仮温度の導入により厳密に取り扱おうとしている。

2.3 回転系への変換

ここでは、方程式系を一定の自転角速度 Ω で回転する回転系に変換する。

2.3.1 スカラーの変換公式

慣性系における時間微分を添字 a で、回転系を添字 r で表現する。このとき、任意のスカラー ψ に対して、

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_r \quad (2.19)$$

が成り立つ⁶。

2.3.2 ベクトルの変換公式

任意のベクトル A に対する慣性系および回転系での微分は次の関係をもつ。

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_a = \left(\frac{dA}{dt}\right)_r + \Omega \times A. \quad (2.20)$$

(証明) 任意のベクトル A を、慣性系では

$$A = iA_x + jA_y + kA_z \quad (2.21)$$

と表し、回転系では

$$A = i'A'_x + j'A'_y + k'A'_z \quad (2.22)$$

と表す。時間微分をとると

$$\begin{aligned} \left(\frac{dA}{dt}\right)_a &= i \left(\frac{dA_x}{dt}\right)_a + j \left(\frac{dA_y}{dt}\right)_a + k \left(\frac{dA_z}{dt}\right)_a \\ &= i' \left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_a + j' \left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_a + k' \left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_a + \left(\frac{di'}{dt}\right)_a A'_x + \left(\frac{dj'}{dt}\right)_a A'_y + \left(\frac{dk'}{dt}\right)_a A'_z \\ &= i' \left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_r + j' \left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_r + k' \left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_r + \Omega \times i' A'_x + \Omega \times j' A'_y + \Omega \times k' A'_z \\ &= \left(\frac{dA}{dt}\right)_r + \Omega \times A. \end{aligned} \quad (2.23)$$

(証明終了)

⁶これは自明のこととしたい。スカラー ψ の座標変換は座標変換テンソルに依存しない(で同じ値をとる)からである。一方、ベクトルの座標変換は、座標変換テンソルとの積で表現される。したがって、座標変換テンソル自体が時間変化する場合、当然ベクトルの時間微分は座標変換テンソルの時間微分の影響を受ける。

ここで $A = r$ (r は位置ベクトル) とおけば慣性系での速度 $v_a \equiv (dr/dt)_a$ (これまでの v) は回転系での速度 $v \equiv (dr/dt)_r$ を用いて次のように表すことができる.

$$v_a = v + \Omega \times r. \quad (2.24)$$

さらに, (2.20) で $A = v_a$ とおけば, 速度の時間微分項は

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{dv}{dt} + 2\Omega \times v + \Omega \times (\Omega \times r) \quad (2.25)$$

と変換できる.

2.3.3 回転系への変換

変換の (2.25) を用いて運動方程式を回転系で記述する.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v - \Omega \times (\Omega \times r) + \nabla \Phi^* + \mathcal{F}. \quad (2.26)$$

ここで, 重力加速度 $g \equiv \nabla \Phi^* - \Omega \times (\Omega \times r)$ を定義すれば, 運動方程式は

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v + g + \mathcal{F} \quad (2.27)$$

となる.

連続の式および熱力学の式においては, ラグランジュ微分が作用している密度および温度は座標変換に無関係なスカラーであるため, その時間微分の形は変わらない. 連続の式は, 速度場の発散を含むが, これは座標変換によっても値は変わらない. したがって, これらの式は形を変えない.

2.4 球座標への変換

2.4.1 直交曲線座標系における微分

一般の直交曲線座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) において、スカラー \bullet およびベクトル $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ は次のように表現される。なお、 h_i は各軸方向の規格化因子であり、各軸方向の基底ベクトルは e_i とする。

$$\nabla \bullet = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_3} \right), \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 A_3) \right], \quad (2.29)$$

$$\nabla^2 \bullet = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_3} \right) \right], \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial \xi_3} \right], \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial \xi_1} \right], \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial \xi_2} \right] \right), \quad (2.31)$$

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_3}, \quad (2.32)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{k=1}^3 e_k \left[\frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{v_k}{h_k} \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} + \left(-\frac{v_j}{h_j} \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_j}{\partial \xi_k} + \frac{v_k}{h_k} \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_k}{\partial \xi_j} \right) v_j \right]. \quad (2.33)$$

2.4.2 球座標系における微分

重力加速度 g が惑星中心を向いているとみなして、方程式系を球座標 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\lambda, \varphi, r)$ に変換する。回転系に固定した直交直線座標 (x_1, x_2, x_3) との関係は

$$x_1 = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad (2.34)$$

$$x_2 = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad (2.35)$$

$$x_3 = r \sin \varphi \quad (2.36)$$

である。ここで、 λ は緯度、 φ は経度、 r は鉛直座標である。また、基底ベクトルを $(e_\lambda, e_\varphi, e_r)$ 、速度ベクトルを (u, v, w) で表す。

各方向の規格化因子 (scale factor) は

$$h_\lambda = r \cos \varphi, \quad h_\varphi = r, \quad h_r = 1. \quad (2.37)$$

したがって、スカラー \bullet およびベクトル $\mathbf{A} = (A_\lambda, A_\varphi, A_r)$ に関する微分表現は次のようになる。

$$\nabla \bullet = e_\lambda \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} + e_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} + e_r \frac{\partial \bullet}{\partial r}, \quad (2.38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left[r \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + r \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi A_\varphi) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) \right], \quad (2.39)$$

$$\nabla^2 \bullet = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cos \varphi \frac{\partial \bullet}{\partial r} \right) \right], \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & e_\lambda \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \\ & + e_\varphi \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cos \varphi A_\lambda) - \frac{\partial A_r}{\partial \lambda} \right] \\ & + e_r \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi A_\lambda) \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\frac{d \bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \bullet}{\partial r}, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \mathbf{A}}{dt} = & e_\lambda \left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \varphi} + w \frac{\partial A_\lambda}{\partial r} + \frac{u}{r} A_r - \frac{u \tan \varphi}{r} A_\varphi \right] \\ & + e_\varphi \left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + w \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{v}{r} A_r + \frac{u \tan \varphi}{r} A_\lambda \right] \\ & + e_r \left[\frac{\partial A_r}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial A_r}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + w \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{v}{r} A_\varphi - \frac{u}{r} A_\lambda \right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.4.3 球座標への変換

自転角速度ベクトルの表現は次のようになる。

$$\begin{aligned} 2\Omega \times \mathbf{v} &= 2\Omega (e_\varphi \cos \varphi + e_r \sin \varphi) \times (u e_\lambda + v e_\varphi + w e_r) \\ &= (2\Omega \cos \varphi w - 2\Omega \sin \varphi v) e_\lambda + 2\Omega \sin \varphi u e_\varphi - 2\Omega \cos \varphi u e_r. \end{aligned} \quad (2.44)$$

したがって、運動方程式は

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + \frac{uv}{r} \tan \varphi - \frac{uw}{r} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (2.45)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\Omega u \sin \varphi - \frac{u^2}{r} \tan \varphi - \frac{vw}{r} + \mathcal{F}_\varphi, \quad (2.46)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega u \cos \varphi + \frac{u^2}{r} + \frac{v^2}{r} + \mathcal{F}_r. \quad (2.47)$$

連続の式は

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho u) + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 w) = 0. \quad (2.48)$$

熱力学の式は

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p^d \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{C_p^d}. \quad (2.49)$$

状態方程式は

$$p = \rho R^d T_v. \quad (2.50)$$

水蒸気の式は

$$\frac{dq}{dt} = S_q. \quad (2.51)$$

ここで,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.52)$$

である.

2.5 z -座標プリミティブ方程式

2.5.1 静力学平衡近似

鉛直方向の運動方程式に対し, 以下のように静力学平衡近似を行なう.

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (2.53)$$

このとき, 運動エネルギーの保存則を考慮して, 水平方向の運動方程式に対しても近似を施す. 運動エネルギーの式は, 運動方程式の各成分にそれぞれ u, v, w をかけることで得られる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) &= u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \\ &= u \left\{ -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \underbrace{2v\Omega \sin \varphi}_{(1)} - \underbrace{2w\Omega \cos \varphi}_{(2)} + \underbrace{\frac{uv}{r} \tan \varphi}_{(3)} - \underbrace{\frac{uw}{r}}_{(4)} + \mathcal{F}_\lambda \right\} \\ &\quad + v \left\{ -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \underbrace{2\Omega u \sin \varphi}_{(1)} - \underbrace{\frac{u^2}{r} \tan \varphi}_{(3)} - \underbrace{\frac{vw}{r}}_{(5)} + \mathcal{F}_\varphi \right\} \\ &\quad + w \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \underbrace{2\Omega u \cos \varphi}_{(2)} + \underbrace{\frac{u^2}{r}}_{(4)} + \underbrace{\frac{v^2}{r}}_{(5)} + \mathcal{F}_r \right\} \\ &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \nabla p - gw - \mathbf{v} \cdot \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

コリオリの力およびメトリック項は同じ番号のもの同士で打ち消しあって, 運動エネルギーの時間変化に寄与しないことがわかる⁷. したがって, 静力学平衡近似の際に鉛直成分の式から落とした項 (2),(4),(5) に対応した水平成分の式の項も取り除く. これにより, 運動方程式の水平成分は次のようになる.

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv \tan \varphi}{r} + fv - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (2.55)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u^2 \tan \varphi}{a} - fu - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_\varphi. \quad (2.56)$$

⁷遠心力を重力加速度から分離してエネルギーの式で考慮すると, この寄与はキャンセルすることなく残る.

ここで, f はコリオリパラメータ $f \equiv 2\Omega \sin \varphi$ である.

2.5.2 薄い球殻近似

大気の層が惑星半径に比べて薄いことを仮定し, 方程式中の r を, 代表的な惑星半径 a でおきかえる. また, r による微分はすべて海拔高度 z による微分でおきかえる. このとき基礎方程式は次のようになる.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.57)$$

$$\frac{dq}{dt} = S_q, \quad (2.58)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv \tan \varphi}{a} + fv - \frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (2.59)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u^2 \tan \varphi}{a} - fu - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_\varphi, \quad (2.60)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (2.61)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p^d \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{C_p^d}, \quad (2.62)$$

$$p = \rho R^d T_v. \quad (2.63)$$

ここで,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.64)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.65)$$

2.6 σ -座標プリミティブ方程式

静力学平衡のもとでは, 気圧 p は鉛直座標 z に対し単調減少する関数である. そこで, 鉛直座標を z から, 地表面気圧 p_s で規格化した気圧座標,

$$\sigma \equiv \frac{p}{p_s} \quad (2.66)$$

に変換する. σ と z の関係は, 静力学平衡の式 (2.5) を変形して得られる.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{g\sigma}{R^d T_v}. \quad (2.67)$$

2.6.1 σ -座標変換公式

z -座標から σ -座標への変換公式を示す.

鉛直微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bullet}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \\ &= -\frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}.\end{aligned}\quad (2.68)$$

水平微分

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma,\end{aligned}\quad (2.69)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma.\end{aligned}\quad (2.70)$$

時間微分

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma.\end{aligned}\quad (2.71)$$

ラグランジュ微分はこれらを用いて,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\bullet}{dt}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z + \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_z + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_z + w \left(\frac{\partial \bullet}{\partial z}\right)_z \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma \\ &\quad + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma - w \right\} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \\ &= \left(\frac{d\bullet}{dt}\right)_\sigma.\end{aligned}\quad (2.72)$$

ここで, σ -座標鉛直速度 $\dot{\sigma}$ を定義する.

$$\dot{\sigma} \equiv \frac{g\sigma}{R^d T_v} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma - w \right\}.\quad (2.73)$$

2.6.2 σ -座標プリミティブ方程式系

静力学平衡の式

(2.67) を重力ポテンシャル $\Phi = gz$ を用いて書けば,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{R^d T_v}{\sigma}.\quad (2.74)$$

運動方程式

水平の圧力勾配は, (2.69) および (2.70) を p に対して適用し, (2.66) を用いれば次のように変換される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_z &= \frac{1}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \right\} \\ &= \frac{R^d T_v}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{R^d T_v}{p} \frac{g\sigma}{R^d T_v} p_s \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \\ &= R^d T_v \left(\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_z = R^d T_v \left(\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right)_\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (2.76)$$

ここで $\pi \equiv \ln p_s$ である. したがって, 運動方程式の水平成分は,

$$\frac{du}{dt} - fv - \frac{uv}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (2.77)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{u^2}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_\varphi. \quad (2.78)$$

連続の式

速度の発散は,

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{v})_z &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \right] \\ &\quad + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial}{\partial \sigma} (v \cos \varphi) \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \right] - \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{dz}{dt} \right)_\sigma \\ &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \right] \\ &\quad + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial}{\partial \sigma} (v \cos \varphi) \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \right] \\ &\quad - \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\sigma + \dot{\sigma} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right] \\ &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \\ &\quad - \frac{g\sigma}{R^d T_v} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\sigma + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma} \right)_\sigma \right] \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}_H)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right)_\sigma. \end{aligned} \quad (2.79)$$

ここで,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_H \equiv \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right)_\sigma. \quad (2.80)$$

ゆえに, z -座標連続の式は次のように変換される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_z + (\nabla \cdot \mathbf{v})_z &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_\sigma + (\nabla \cdot \mathbf{v}_H)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right)_\sigma \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_\sigma + (\nabla \cdot \mathbf{v}_H)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\rho}{p_s} \left(\frac{d}{dt} \frac{p_s}{\rho} \right)_\sigma \\ &= \left(\frac{d \ln p_s}{dt} \right)_\sigma + (\nabla \cdot \mathbf{v}_H)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

したがって $\pi \equiv \ln p_s$ を用いて記述すれば次のようになる.

$$\frac{d\pi}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v}_H + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.82)$$

熱力学の式

(2.62) の右辺第 1 項は次のように変換される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_p^d \rho} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{C_p^d \rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma p + \dot{\sigma} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} \\ &= \frac{1}{C_p^d \rho} \left\{ \sigma \frac{\partial p_s}{\partial t} + \sigma \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma p_s + \dot{\sigma} p_s \right\} \\ &= \frac{R^d T_v}{C_p^d} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

ここで,

$$\mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma = \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.84)$$

したがって, 熱力学の式は次のようになる.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{R^d T_v}{C_p^d} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right\} + \frac{Q^*}{C_p^d}. \quad (2.85)$$

2.6.3 境界条件

ここで, σ 座標における境界条件について述べる.

地表面高度

$$\Phi = \Phi_s(\lambda, \varphi) \quad \text{at } \sigma = 1. \quad (2.86)$$

すなわち, Φ_s は表面地形を表す. この境界条件を用いて, 静力学平衡の式を鉛直積分することで, 任意の σ における高度 Φ を求めることができる.

σ 座標鉛直速度

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, 1. \quad (2.87)$$

水平流および熱力学変数

ここでは述べない.

2.6.4 傾向方程式

連続の式を鉛直方向に $\sigma = 0$ から $\sigma = 1$ まで積分し, $\dot{\sigma}$ に関する境界条件を用いれば, 傾向方程式とよばれる π の時間変化に関する式が得られる.

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = - \int_0^1 \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi d\sigma - \int_0^1 D d\sigma. \quad (2.88)$$

この式を用いれば, $\dot{\sigma}$ の情報がなくても地表面気圧の時間変化を求めることができる. なお, ここでは後のことを考えて $\nabla \cdot \mathbf{v}_H$ を D と表現している. D については次節で改めて定義する.

鉛直速度 $\dot{\sigma}$ は, 連続の式を鉛直方向に $\sigma = 0$ から $\sigma = \sigma$ まで積分することで診断的に得られる.

$$\dot{\sigma} = -\sigma \frac{\partial \pi}{\partial t} - \int_0^\sigma D d\sigma - \int_0^\sigma \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi d\sigma. \quad (2.89)$$

2.7 モデル支配方程式

2.7.1 渦度方程式

渦度の定義を再掲する.

$$\zeta \equiv \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi). \quad (2.90)$$

運動方程式の u の式 (2.77) に $\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi$ を作用し, v の式 (2.78) に $\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}$ を作用し, この両式の差をとって変形すれば次の渦度方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = & - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta v \cos \varphi) - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\zeta u) \\ & - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} - \mathcal{F}_\varphi + f u \right] \\ & - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[-\cos \varphi \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda \cos \varphi + f v \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

(証明) (2.77), (2.78) のそれぞれ左辺第 1 項を, (2.72), (2.73) を用いて展開すると以下のようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - fv - \frac{uv}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + fu + \frac{u^2}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_\varphi. \quad (2.93)$$

(2.93) に $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ を作用した式から (2.92) に $\frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi$ を作用した式を引くことで,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \lambda} (fu) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u^2}{a} \tan \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathcal{F}_\varphi) \\ - & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi fv) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{uv}{a} \sin \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi \mathcal{F}_\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

(2.94) の Φ に関する項 (左辺第 7 項と第 16 項) は打ち消しあって消える. その他の項は以下のように整理される.

時間微分の項 (第 1 項と第 10 項):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\ & = a \cos \varphi \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

速度の 2 階水平微分の項その 1 (第 3, 12, 15 項):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{uv}{a} \sin \varphi \right) \\ & = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{v}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{v}{a} \left(\cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \left(\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right) v \cos \varphi \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta v \cos \varphi). \end{aligned} \quad (2.96)$$

速度の 2 階水平微分の項その 2 (第 2, 6, 11 項):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u^2}{a} \tan \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u^2}{a} \tan \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{u}{a \cos \varphi} \left(u \sin \varphi - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{u}{a \cos \varphi} \left(-u \frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} (\zeta u). \tag{2.97}
\end{aligned}$$

ここで, 2 行目の第 3 項の変形には, (2.96) の 2, 3 行目で第 1 項に対して用いた変形を用いた.

(2.94) を (2.95), (2.96), (2.97) を用いて整理し, 両辺に $\frac{1}{a \cos \varphi}$ を掛けることで, (2.91) が得られる.

(証明終了)

2.7.2 発散方程式

発散の定義を再掲する.

$$D \equiv \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi). \tag{2.98}$$

運動方程式の u の式 (2.77) に $\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}$ を作用し, v の式 (2.78) に $\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi$ を作用し, 両式の和をとって変形すると次の発散方程式を得る.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\zeta v) - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta u \cos \varphi) \\
&\quad - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} - \mathcal{F}_\lambda - f v \right] \\
&\quad - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\cos \varphi \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{R^d T_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} - \mathcal{F}_\varphi \cos \varphi + f u \cos \varphi \right] \\
&\quad - \nabla_\sigma^2 (\Phi + KE). \tag{2.99}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\nabla_\sigma^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \tag{2.100}$$

$$KE = \frac{u^2 + v^2}{2}. \tag{2.101}$$

(証明) (2.92) に $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ を作用した式と (2.93) に $\frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi$ を作用した式との和をとることで、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial \lambda} (fv) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{uv}{a} \tan \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathcal{F}_\lambda) \\
& + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi fu) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{u^2}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi \mathcal{F}_\varphi) = 0.
\end{aligned} \tag{2.102}$$

この式は以下のように整理される.

時間微分の項 (第 1 項と第 10 項):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right\} \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right\} \\
& = a \cos \varphi \frac{\partial D}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Φ に関する項 (第 7 項と第 16 項):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\
& = a \cos \varphi \left\{ \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right\} \Phi \\
& = a \cos \varphi \nabla_\sigma^2 \Phi.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

速度の 2 階水平微分の項その 1 (第 2, 12 項):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\
& = \frac{1}{2a \cos \varphi} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} \right) \\
& = \left\{ \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \right\} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
& = a \cos \varphi \nabla_\sigma^2 KE - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).
\end{aligned} \tag{2.105}$$

第 2 項と第 3 項については、これ以降の項の整理の際に再登場する.

速度の2階水平微分の項その2 (第3, 6項, (2.105)の第2項):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{uv}{a} \tan \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) \\
&= - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ v \left(\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right) \right\} \\
&= - \frac{\partial}{\partial \lambda} (\zeta v). \tag{2.106}
\end{aligned}$$

速度の2階水平微分の項その3 (第11, 15項, (2.105)の第3項):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{u^2}{a} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{u}{a} \left(u \sin \varphi - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{u}{a} \left(u \frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} + \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{u}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ u \cos \varphi \left(\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta u \cos \varphi). \tag{2.107}
\end{aligned}$$

(2.102) を (2.103), (2.104), (2.105), (2.106), (2.107) を用いて整理し, 両辺に $\frac{1}{a \cos \varphi}$ を掛けることで, (2.99) が得られる.

(証明終り)

2.7.3 熱力学の式

(2.85) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial (uT)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial (vT \cos \varphi)}{\partial \varphi} + TD \\
&\quad - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \kappa T_v \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{Q^*}{C_p}. \tag{2.108}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\kappa = \frac{R^d}{C_p^d} \tag{2.109}$$

である.

2.7.4 温度の基本場とずれの分離

仮温度 T_v を次のように σ のみに依存する場 $\bar{T}_v(\sigma)$ と, そこからのずれ成分 T'_v にわけて記述する.

渦度方程式で T_v を含む項は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \\
= & -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d \bar{T}_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] \\
& + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d \bar{T}_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \\
= & -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{R^d \bar{T}_v}{a} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] - \frac{R^d \bar{T}_v}{a} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \varphi \partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \right\} \\
= & -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \right\}. \tag{2.110}
\end{aligned}$$

発散方程式で T_v を含む項は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d T_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] \\
= & -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d \bar{T}_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d T'_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \\
& - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d \bar{T}_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d T'_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] \\
= & -\frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (R^d \bar{T}_v \pi) - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d T'_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \\
& - \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (R^d \bar{T}_v \pi) \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d T'_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] \\
= & -\nabla_\sigma^2 (R^d \bar{T}_v \pi) - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{R^d T'_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{R^d T'_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right]. \tag{2.111}
\end{aligned}$$

ここで

$$\nabla_\sigma^2 \equiv \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tag{2.112}$$

を用いた.

熱力学の式では, 温度 T を σ のみに依存する場 $\bar{T}(\sigma)$ と, そこからのずれ成分 T' にわけて記述す

る。すなわち、右辺第 1-3 項は次のように変形される。

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial(uT)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial(vT \cos \varphi)}{\partial \varphi} + TD \\
&= -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial(u\bar{T})}{\partial \lambda} + \frac{\partial(uT')}{\partial \lambda} + \frac{\partial(v\bar{T} \cos \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(vT' \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\} + \bar{T}D + T'D \\
&= -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \bar{T} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial(uT')}{\partial \lambda} + \bar{T} \frac{\partial(v \cos \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(vT' \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\} \\
&\quad + \bar{T} \left[\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(v \cos \varphi) \right] + T'D \\
&= -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial(uT')}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial(vT' \cos \varphi)}{\partial \varphi} + T'D. \tag{2.113}
\end{aligned}$$

2.7.5 支配方程式

以上を用いて方程式系を記述すれば次のようになる。

連続の式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\sigma} \pi = -D - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}. \tag{2.114}$$

静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{R^d T_v}{\sigma}. \tag{2.115}$$

運動方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial v_A}{\partial \lambda} - \frac{\partial(u_A \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\}, \tag{2.116}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial u_A}{\partial \lambda} + \frac{\partial(v_A \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\} - \nabla_{\sigma}^2(\Phi + R\bar{T}\pi + KE). \tag{2.117}$$

ここで、

$$u_A(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv (\zeta + f)v - \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{RT'_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_{\lambda}, \tag{2.118}$$

$$v_A(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv -(\zeta + f)u - \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} - \frac{RT'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_{\varphi}. \tag{2.119}$$

熱力学の式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial(uT')}{\partial \lambda} + \frac{\partial(vT' \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\} + T'D \\
&\quad - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \kappa T_v \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{Q^*}{C_p}. \tag{2.120}
\end{aligned}$$

水蒸気の式

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial(uq)}{\partial \lambda} + \frac{\partial(vq \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\} + qD - \dot{\sigma} \frac{\partial q}{\partial \sigma} + S_q. \tag{2.121}$$

(2.16) で導入した Q^* から粘性による寄与 $C_p D(v)$ を再び分離し, $Q^* = Q + C_p D(v)$ とする. 一般に粘性は運動方程式において適当なパラメタリゼーションによって表現する. また, 渦度, 発散, 温度, 水蒸気の式に対してそれぞれ水平拡散項 $D(\zeta)$, $D(D)$, $D(T)$, $D(q)$ をつける. この項の付加は主に数値的安定性の要請によるものであるが, 物理的には後で行なう離散化のスケール以下の運動を表現していると解釈できる. 最後に, 乾燥大気の気体定数および定圧比熱 R^d , C_p^d をそれぞれ R , C_p のようにあらためて置きなおせば, 別紙『力学過程』の支配方程式系を得る.

2.8 参考文献

Haltiner, G.J., Williams, R.T., 1980: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology (2nd ed.)*.
John Wiley & Sons, 477pp.

第3章 座標系・変換公式に関する解説

3.1 球面調和函数

ここでは連続系での球面調和函数を定義し、スペクトル計算の理解に必要な性質を挙げ、証明する。

まず球面調和函数を定義し、次いで球面調和函数が完全直交系をなすことを主張する。このことにより、球面上に分布するあらゆる連続関数が球面調和函数の重ね合わせで一意的に表されることになる。

球面調和函数は2次元ラプラシアンに関する固有関数であり、このために全波数という概念が生まれる。参考までにこのことも記しておく。

さらに、球面調和函数を空間微分した結果も書いておく。

1. 定義と性質 (球面調和函数, Legendre 函数, Legendre 陪函数)
2. 空間微分
3. 全波数の概念

また、イメージをつかむために、ルジャンドル (陪) 関数のグラフを示す。

3.1.1 定義と性質

ここでは、岩波公式集¹の Legendre 函数・陪函数 \tilde{P}_n^m 、2 で規格化した Legendre 函数・陪函数 P_n^m 、 4π で規格化した球面調和函数 Y_n^m の順に定義する。さらにそれらの性質として、従う微分方程式、漸下式、完全規格直交性について述べる。

岩波公式集の Legendre 函数・陪函数 \tilde{P}_n^m

- 定義

¹森口, 宇田川, 一松編「数学公式 III」, 1960 を指す。

岩波公式集によると Legendre 函数・陪函数 $\tilde{P}_n^m(\mu)$ は $-1 \leq \mu \leq 1$ において次式で定義される (Rodrigues の公式).

$$\tilde{P}_n^m \equiv \frac{(1-\mu^2)^{\frac{|m|}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2 - 1)^n. \quad (3.1)$$

ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n$ を満たす整数である. Legendre 函数 \tilde{P}_n^0 を \tilde{P}_n と書く.

- Legendre 函数・陪函数の満たす方程式

$\tilde{P}_n^m(\mu)$ は次の方程式を満たす.

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} \tilde{P}_n^m \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right\} \tilde{P}_n^m = 0. \quad (3.2)$$

ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n$ を満たす整数である.

- Legendre 函数・陪函数の従う漸化式

$\tilde{P}_n^m(\mu)$ は次の漸化式に従う.

$$(n - |m| + 1) \tilde{P}_{n+1}^m - (2n + 1) \mu \tilde{P}_n^m + (n + |m|) \tilde{P}_{n-1}^m = 0. \quad (3.3)$$

ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n - 1$, または $m = n = 0$ を満たす整数である.

さらに, 次の関係式が成り立つ.

$$(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \tilde{P}_n^m = (n + |m|) \tilde{P}_{n-1}^m - n \mu \tilde{P}_n^m. \quad (3.4)$$

ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n - 1$ を満たす整数である.

- 完全規格直交性

$\tilde{P}_n^m(\mu)$ ($n = |m|, |m| + 1, \dots$) は次の直交関係を満たす.

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}_n^m(\mu) \tilde{P}_{n'}^m(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \delta_{nn'}. \quad (3.5)$$

ただし, m, n, n' は $0 \leq |m| \leq n, n'$ を満たす整数である.

$-1 \leq \mu \leq 1$ で定義される連続関数 $A(\mu)$ は $\{\tilde{P}_n^m | n = |m|, |m| + 1, \dots\}$ を用いて

$$A(\mu) = \sum_{n=|m|}^{\infty} \tilde{A}_n^m \tilde{P}_n^m(\mu), \quad (3.6)$$

$$\tilde{A}_n^m = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_{-1}^1 A(\mu) \tilde{P}_n^m(\mu) d\mu \quad (3.7)$$

と表される.

2 で規格化した Legendre 函数・陪函数 P_n^m

• 定義

2 で規格化した Legendre 函数・陪函数 $P_n^m(\mu)$ は $-1 \leq \mu \leq 1$ において次式で定義される.

$$P_n^m \equiv \sqrt{\frac{(2n+1)(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \tilde{P}_n^m = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{(1-\mu^2)^{\frac{|m|}{2}}}{2^n n!}} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2 - 1)^n. \quad (3.8)$$

ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n$ を満たす整数である. Legendre 函数 P_n^0 を P_n とも書く.

• Legendre 函数・陪函数の満たす方程式

$P_n^m(\mu)$ は, 次の方程式を満たす.

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right\} P_n^m = 0. \quad (3.9)$$

ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n$ を満たす整数である.

• Legendre 函数・陪函数の従う漸化式

$P_n^m(\mu)$ は, 次の漸化式に従う.

$$(n-|m|+1) \sqrt{\frac{1}{2n+3} \frac{(n+1+|m|)!}{(n+1-|m|)!}} P_{n+1}^m - (2n+1) \sqrt{\frac{1}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}} \mu P_n^m \\ + (n+|m|) \sqrt{\frac{1}{2n-1} \frac{(n-1+|m|)!}{(n-1-|m|)!}} P_{n-1}^m = 0, \quad (3.10)$$

$$P_{n+1}^m = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n+3)}{(n-|m|+1)(n+|m|+1)}} \mu P_n^m \\ - \sqrt{\frac{(2n+1)(2n+3)}{(n-|m|+1)(n+|m|+1)}} \sqrt{\frac{(n-|m|)(n+|m|)}{(2n+1)(2n-1)}} P_{n-1}^m. \quad (3.11)$$

ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n-1$, または $m = n = 0$ を満たす整数である.

さらに次の関係式が成り立つ.

$$(1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m = (n+|m|) \sqrt{\frac{(n-|m|)(2n+1)}{(n+|m|)(2n-1)}} P_{n-1}^m - n\mu P_n^m. \quad (3.12)$$

ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n-1$ を満たす整数である.

• 完全規格直交性

$P_n^m(\mu)$ ($n = |m|, |m+1, \dots$) は次の直交関係を満たす.

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = 2\delta_{nm}. \quad (3.13)$$

ただし, m, n, n' は $0 \leq |m| \leq n, n'$ を満たす整数である.

$-1 \leq \mu \leq 1$ で定義される連続関数 $A(\mu)$ は $\{P_n^m | n = |m|, |m+1|, \dots\}$ を用いて

$$A(\mu) = \sum_{n=|m|}^{\infty} \tilde{A}_n^m P_n^m(\mu), \quad (3.14)$$

$$\tilde{A}_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \quad (3.15)$$

と表される.

球面調和関数 Y_n^m

- 定義

球面調和関数 $Y_n^m(\lambda, \varphi)$ は Legendre 関数 $P_n^m(\sin \varphi)$, 三角関数² $\exp(im\lambda)$ を用いて次のように定義される.

$$Y_n^m(\lambda, \varphi) \equiv P_n^m(\sin \varphi) \exp(im\lambda). \quad (3.16)$$

ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n$ を満たす整数である.

- 球面調和関数の満たす方程式

$Y_n^m(\lambda, \varphi)$ は次の方程式を満たす.

$$\left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + n(n+1) \right] Y_n^m = 0. \quad (3.17)$$

すなわち,

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + n(n+1) \right] Y_n^m = 0 \quad (3.18)$$

の解である. ただし, m, n は $0 \leq |m| \leq n$ を満たす整数である.

- 完全規格直交性

Y_n^m は次の直交関係を満たす.

$$\int_{-1}^1 Y_n^m(\lambda, \varphi) Y_{n'}^{m'*}(\lambda, \varphi) d(\sin \varphi) d\lambda = 4\pi \delta_{mm'} \delta_{nn'}. \quad (3.19)$$

ただし, m, m', n, n' は $0 \leq |m| \leq n$ と $0 \leq |m'| \leq n'$ とを満たす整数である.

球面上で定義される連続関数 $A(\lambda, \varphi)$ は $\{Y_n^m | m = 0, 1, 2, \dots, n = |m|, |m+1|, \dots\}$ を用いて

$$A(\lambda, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \tilde{A}_n^m Y_n^m(\lambda, \varphi), \quad (3.20)$$

$$\tilde{A}_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d(\sin \varphi) \int_0^{2\pi} d\lambda A(\lambda, \varphi) Y_n^{m*}(\lambda, \varphi) \quad (3.21)$$

と表される.

² $\exp(im\lambda)$ は $\int_0^{2\pi} \exp(im\lambda) \exp(-im'\lambda) d\lambda = 2\pi \delta_{mm'}$ を満たす. ただし, m, m' は整数である.

3.1.2 球面調和函数の空間微分

ここでは、球面調和函数 $Y_n^m(\varphi, \lambda)$ の

- x 微分
- y 微分
- 2次元ラプラシアン

の計算をする。

x 微分

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \lambda} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (P_n^m(\sin \varphi) \exp(im\lambda)) = \frac{im}{r \cos \varphi} P_n^m(\sin \varphi) \exp(im\lambda). \quad (3.22)$$

y 微分

$$\frac{1}{r} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (P_n^m(\sin \varphi) \exp(im\lambda)) = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \frac{d}{d\mu} P_n^m(\mu) \exp(im\lambda). \quad (3.23)$$

2次元ラプラシアン

$$\begin{aligned} \nabla_H^2 Y_n^m &\equiv \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] Y_n^m \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] Y_n^m \\ &= -\frac{n(n+1)}{r^2} Y_n^m \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.1.3 コメント — 全波数について

球面調和函数 $Y_n^m(\lambda, \varphi)$ において n のことを全波数と呼ぶ。

全波数には、座標系の回転に関して不変である、という特徴がある。すなわち、任意の $Y_n^m(\lambda, \varphi)$ は回転して得られる座標系 (λ', φ') における全波数 n の球面調和函数 $\{Y_n^m(\lambda', \varphi') | m = -n, -n+1, \dots, n\}$ の和で表現できる：

$$Y_n^m(\lambda, \varphi) = \sum_{m'=-n}^n A_n^{m'} Y_n^{m'*}(\lambda', \varphi'). \quad (3.25)$$

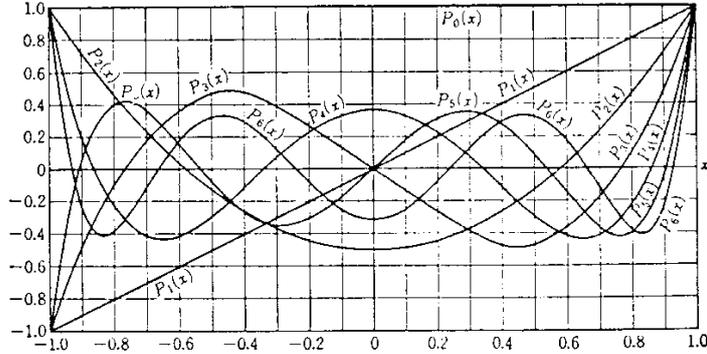
のである³。この特徴は、球面調和函数が2次元ラプラシアンの固有値であることによる⁴。

³この特徴を言い替えば、全波数 n の球面調和函数の重ね合わせで表現できる分布関数は座標系を回転させた系においても全波数 n の球面調和函数の重ね合わせで表現できることになる。

⁴ $\nabla_H^2 \equiv \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right]$ の、固有値を $-\frac{n(n+1)}{r^2}$ とする固有関数であることと、スカラー演算子 ∇_H^2

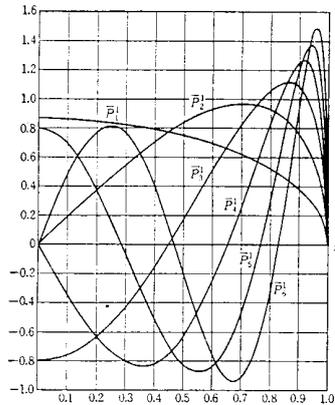
3.1.4 グラフ

$P_n^m(\mu)$ の概形をつかむために、2 で規格化した P_n, P_n^1, P_n^2 ⁵ のグラフを示す。

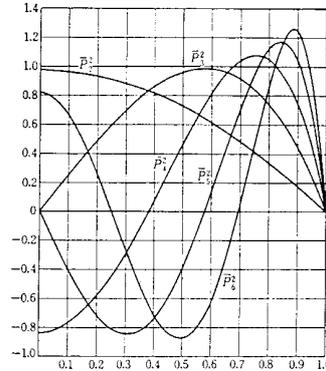


第 4.1 図 Legendre の多項式のグラフ

岩波公式集の Legendre 函数 \tilde{P}_n のグラフ (森口, 宇田川, 一松, 1960)



第 5.3 図 $\tilde{P}_n^1(x)$ のグラフ



第 5.4 図 $\tilde{P}_n^2(x)$ のグラフ

第 5.3 図, 第 5.4 図においては, 便宜上, 正規化された陪函数 $\tilde{P}_n^m(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x)$ [$m=1, 2; n=1, 2, 3, 4, 5, 6, n \geq m$] のグラフを示した。

Legendre 函数 $\tilde{P}_n^1 = P_n^1/\sqrt{2}, \tilde{P}_n^2 = P_n^2/\sqrt{2}$ のグラフ (森口, 宇田川, 一松, 1960)

が座標系の回転に関して不変な演算子であることに起因する。

すなわち, $\nabla_H^2 Y_n^m(\lambda, \varphi) = -\frac{n(n+1)}{r^2} Y_n^m(\lambda, \varphi)$ より, 球面調和函数 $Y_n^m \exp(im\lambda)$ は固有値を $-\frac{n(n+1)}{r^2}$ とする ∇_H^2 の固有関数である。 $\{Y_n^m | n=0, 1, 2, \dots, m=-n, -n+1, \dots, n\}$ の完全直交性より, $\{Y_n^m | m=-n, -n+1, \dots, n\}$ は $\nabla_H^2 f = -\frac{n(n+1)}{r^2} f$ の解空間を張っている基底である。

座標系を回転させて, 新たな座標系での球面調和函数 $Y_n^m(\lambda', \varphi')$ の和の形で前の座標系での球面調和函数 $Y_n^m(\lambda, \varphi)$ を表現することを考えよう。

絶対系で見て同じ位置の値を比べると, 2 次元ラプラシアンを演算した値は不変なので, 前の座標系での球面調和函数 $Y_n^m(\lambda', \varphi')$ は新たな座標系においても $\nabla_H'^2 Y_n^m = -\frac{n(n+1)}{r^2} Y_n^m$ の解である。 新たな座標系の球面調和函数の集合 $\{Y_n^m(\lambda', \varphi') | m=-n, -n+1, \dots, n\}$ も $\nabla_H'^2 Y_n^m = -\frac{n(n+1)}{r^2} Y_n^m$ の解空間の基底である。 したがって, 前の座標系の球面調和函数は新たな座標系の球面調和函数の和の形で書ける。

⁵(2005/4/4 石渡) 関数形も書いておきたい。 グラフは自分で描きたい。

3.2 微分公式, GCM の変数の微分関係式

ここでは, スカラー量, ベクトルの微分を計算する. さらにそれらを元に, 発散 D , 渦度 ζ , 速度ポテンシャル χ , 流線関数 ψ と (u, v) との関係をつける.

3.2.1 スカラー量の微分

スカラー量 $f(\lambda, \varphi)$ の x 微分は $\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ で与えられる.

f の y 微分は $\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left(= \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right)$ で与えられる.

f の 2 次元ラプラシアンは

$$\begin{aligned} \nabla_H^2 f &\equiv \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] f \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] f \end{aligned} \quad (3.26)$$

で与えられる.

3.2.2 ベクトル量の微分

2 次元ベクトル場 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ の水平発散は

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_H \mathbf{v} &\equiv \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_2 \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} (\sqrt{1 - \mu^2} v_2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

で与えられる.

\mathbf{v} の回転の r 成分は,

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{v})_r &\equiv \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v_2}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_1 \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial v_2}{\partial \lambda} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} (\sqrt{1 - \mu^2} v_1) \end{aligned} \quad (3.28)$$

で与えられる.

以上で得られた微分公式を元に, 以下に実際に GCM で使用する便利な微分の公式を並べておく.

3.2.3 発散

水平分布する速度場の水平発散 D を u, v を用いて表す

$$D = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi). \quad (3.29)$$

3.2.4 渦度

水平分布する速度場の渦度 ζ を u, v を用いて表す

$$\zeta = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi). \quad (3.30)$$

3.2.5 速度ポテンシャル, 流線関数と (u, v)

速度ポテンシャル χ , 流線関数 ψ は

$$D \equiv \nabla_H^2 \chi, \quad (3.31)$$

$$\zeta \equiv \nabla_H^2 \psi \quad (3.32)$$

で定義される. (u, v) を χ, ψ で表す.

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}, \quad (3.33)$$

$$v = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \quad (3.34)$$

となる.

3.3 Legendre 関数 P_n の性質

ここでは Legendre 関数 P_n の性質である

1. $n-1$ 次以下の多項式との積を $-1 \leq \mu \leq 1$ まで積分すると零になること
2. $P_n(\mu)$ が $-1 < \mu < 1$ に n 個の零点を持つこと,

を記す. 1 より Gauss 格子を定義することが保証される. また, 1, 2 は共に Gauss-Legendre の公式の証明に用いられる.

3.3.1 多項式と Legendre 関数の積の積分

$P_n(\mu)$ は、 μ の n 次多項式である。 $n-1$ 次以下の任意の多項式は $P_0 \sim P_{n-1}$ の和で表されることが、 P_n の直交性から明らかに、 $n-1$ 次以下の任意の多項式 $f(\mu)$ との積を積分すると

$$\int_{-1}^1 f(\mu)P_n(\mu)d\mu = 0 \quad (3.35)$$

が成り立つことがわかる。

3.3.2 Legendre 関数の零点

P_n は $-1 < \mu < 1$ に n 個の互いに異なる零点を持っている。このことについて、以下に証明しておく。(寺沢, 1983 の 10.7 節より)

1. $f(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ を導入する。
2. $f = 0$ の解は、 $x = -1, 1$ である。ゆえに、Rolle の定理により、 f' はある α ($-1 < \alpha < 1$) で $f'(\alpha) = 0$ となる。
 $f' = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}$ より、 $f' = 0$ の解は $x = -1, \alpha, 1$ のみである。
3. 同様に、 $f'' = 0$ の解は $x = -1, \beta_1, \beta_2, 1$ ($-1 < \beta_1 < \beta_2 < 1$) のみ。
4. 以上を繰り返すと、 $f^{(n)} = 0$ の解は -1 と 1 の間で互いに異なる n 個の解を持つ。($x = -1, 1$ は解でないことに注意せよ。)
5. したがって、 $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n$ は -1 と 1 の間で互いに異なる n 個の解を持つ。(証明終り)

この零点の求め方としては、 $x_j = \cos \frac{j-1/2}{n} \pi$ を近似解として Newton 法を用いるという方法がある。

3.4 積分評価

3.4.1 Gauss の台形公式

ここでは Gauss の台形公式を示す。

波数 M 以下の三角関数で表現される $g(\lambda)$ ($0 \leq \lambda < 2\pi$)

$$g(\lambda) = \sum_{m=-M}^{m=M} g_m \exp(im\lambda) \quad (3.36)$$

について $M < I$ を満たすように I をとると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{I} \sum_{n=1}^I g(\lambda_n), \\ \lambda_n &= \frac{2\pi(n-1)}{I} \quad (n = 1, 2, \dots, I) \end{aligned} \quad (3.37)$$

が成り立つ. これを Gauss の台形公式という.

より実用的な公式は,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^I \exp(im\lambda_n) &= \begin{cases} I & (m = 0), \\ 0 & (0 < |m| < I), \end{cases} \\ \lambda_n &= \frac{2\pi(n-1)}{I} \quad (n = 1, 2, \dots, I) \end{aligned} \quad (3.38)$$

である. この証明は, $I > M$ ($|m|$ の最大値) より $m \neq 0$ の時には $\exp(im\lambda_n) = \exp\left(\frac{2\pi im(n-1)}{I}\right)$ において, 全ての n について $m(n-1)$ が I の整数倍になることがないことを考慮すると明らかである ($m, n-1$ はともに I よりも小さい整数なので, $m(n-1)$ は I の整数倍にならない)⁶.

以下に Gauss の台形公式の証明を記す. まず, 左辺を計算すると,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\lambda) d\lambda = \sum_{m=-M}^M \frac{1}{2\pi} g_m \int_0^{2\pi} \exp(im\lambda) d\lambda = g_0 \quad (3.40)$$

である. ここで, $\int_0^{2\pi} \exp(im\lambda) d\lambda$ は $m = 0$ の項しか残らないことを使った. 一方右辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{I} \sum_{n=1}^I g(\lambda_n) &= \frac{1}{I} \sum_{n=1}^I \sum_{m=-M}^M g_m \exp(im\lambda_n) \\ &= g_0 + \sum_{m=-M, m \neq 0}^M \frac{g_m}{I} \sum_{n=1}^I \left(\exp\left(\frac{2\pi im}{I}\right) \right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

ここで, 上に示した「より実用的な公式」により

$$\sum_{n=1}^I \left(\exp\left(\frac{2\pi im}{I}\right) \right)^{n-1} = 0 \quad (m \neq 0) \quad (3.42)$$

が成り立つ. したがって,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\lambda) d\lambda = \frac{1}{I} \sum_{n=1}^I g(\lambda_n) \quad (3.43)$$

となる.

⁶等比級数の和を直接計算しても良い.

$$\sum_{n=1}^I \exp\left\{ im \frac{2\pi(n-1)}{I} \right\} = \frac{1 - \left(e^{\frac{im2\pi}{I}} \right)^I}{1 - e^{\frac{im2\pi}{I}}} = \frac{1 - e^{im2\pi}}{1 - e^{\frac{im2\pi}{I}}} = 0 \quad (3.39)$$

3.4.2 Gauss-Legendre の公式

$f(\mu)$ を $2J-1$ 次以下の多項式とする. P_n を 2 で規格化した n 次の Legendre 函数とする. このとき, $\int_{-1}^1 f d\mu$ は P_J の零点である Gauss 格子 $\mu_j (j = 1, 2, \dots, J)$ における f の値 $f(\mu_j)$ のみを用いて, 次式にもとづいて正確に評価することができる.

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = 2 \sum_{j=1}^J f(\mu_j) w_j, \quad (3.44)$$

$$w_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_J(\mu)}{(\mu - \mu_j) P_J'(\mu_j)} d\mu = \frac{(2J-1)(1-\mu_j^2)}{(J P_{J-1}(\mu_j))^2}. \quad (3.45)$$

ここで, w_j は Gauss 荷重と呼ばれる.

以下では上の式を証明する. ただし, Legendre 函数としては, 最初は岩波公式集の Legendre 函数 \tilde{P}_n を使い, 最後に 2 で規格化した Legendre 函数 P_n に直すことにする⁷.

STEP 1 Lagrange 補間の導入

$f(\mu)$ を K 次多項式 ($0 \leq K \leq 2J-1$) とする. \tilde{P}_n を岩波公式集の Legendre 函数 (Rodrigues の公式) とする.

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}_n(\mu) \tilde{P}_{n'}(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'}. \quad (3.46)$$

$L(\mu)$ を, $f(\mu_j)$ を Lagrange 補間公式にしたがって補間した多項式として定義する.

$$L(\mu) \equiv \sum_{j=1}^J f(\mu_j) \prod_{k=1, k \neq j}^J \frac{\mu - \mu_k}{\mu_j - \mu_k}. \quad (3.47)$$

このとき, 各 j について $L(\mu_j) = f(\mu_j)$ である. ここで L は, $0 \leq K \leq J-1$ の時 (f が $J-1$ 次以下の多項式) のときは厳密に $L = f$ になる⁸ ことに注意せよ.

したがって, 関数 $f(\mu) - L(\mu)$ は

- $0 \leq K \leq J-1$ の時, 0 である.
- $J \leq K \leq 2J-1$ の時,
 $\mu = \mu_j$ を零点とする K 次多項式である. μ_j は J 次多項式 $\tilde{P}_J(\mu)$ の零点であることを思い出すと, $f - L$ は $\tilde{P}_J(\mu)$ で割り切れるので, ある $K - J$ 次多項式 $S(\mu)$ を用いて,

$$f(\mu) - L(\mu) = \tilde{P}_J(\mu) S(\mu) \quad (3.48)$$

と書くことができる.

⁷ 混乱を招かぬよう, このような手続きを踏む. 実際, 公式集を含む他の文献には \tilde{P}_n^m の公式が書かれていることが多いので, このように書く方が他と参照しやすいであろう.

⁸ このことは $L - f$ が $J-1$ 次以下の多項式であること, J 個の零点 μ_j を持つことから明らか.

$f(\mu) - L(\mu)$ を μ について -1 から 1 まで積分する. $J \leq K \leq 2J - 1$ の時については Legendre 関数の直交性より, $\tilde{P}_J(\mu)S(\mu)$ の積分は零である. したがって,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(\mu)d\mu &= \int_{-1}^1 L(\mu)d\mu \\
&= \sum_{j=1}^J f(\mu_j) \int_{-1}^1 \frac{\prod_{k=1}^J (\mu - \mu_k)}{(\mu - \mu_j) \prod_{k=1, k \neq j}^J (\mu_j - \mu_k)} d\mu \\
&= \sum_{j=1}^J f(\mu_j) \int_{-1}^1 \frac{\tilde{P}_J(\mu)}{(\mu - \mu_j)\tilde{P}'_J(\mu_j)} d\mu \\
&= 2 \sum_{j=1}^J f(\mu_j)w_j
\end{aligned} \tag{3.49}$$

ここで, 証明すべき式の P_J は規格化されていて, 上の式の \tilde{P}_J は規格化されていないにもかかわらず同じ w_j が使われているが, \tilde{P}_J と P_J の規格化定数は同じなので consistent である.

STEP 2 $w_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{P}_J(\mu)}{(\mu - \mu_j)\tilde{P}'_J(\mu_j)} d\mu$ の漸化式を用いた変形

漸化式 (岩波の Legendre 関数・陪関数の従う漸化式) において $m = 0$ とした式

$$(n+1)\tilde{P}_{n+1}(\mu) = (2n+1)\mu\tilde{P}_n(\mu) - n\tilde{P}_{n-1}(\mu) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{3.50}$$

より,

$$\begin{aligned}
(n+1) \begin{vmatrix} \tilde{P}_{n+1}(x) & \tilde{P}_n(x) \\ \tilde{P}_{n+1}(y) & \tilde{P}_n(y) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} (2n+1)x\tilde{P}_n(x) - n\tilde{P}_{n-1}(x) & \tilde{P}_n(x) \\ (2n+1)y\tilde{P}_n(y) - n\tilde{P}_{n-1}(y) & \tilde{P}_n(y) \end{vmatrix} \\
&= (2n+1)(x-y)\tilde{P}_n(x)\tilde{P}_n(y) \\
&\quad + n(-\tilde{P}_{n-1}(x)\tilde{P}_n(y) + \tilde{P}_{n-1}(y)\tilde{P}_n(x)) \\
&= (2n+1)(x-y)\tilde{P}_n(x)\tilde{P}_n(y) + n \begin{vmatrix} \tilde{P}_n(x) & \tilde{P}_{n-1}(x) \\ \tilde{P}_n(y) & \tilde{P}_{n-1}(y) \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

となる. この式を $n = 0, 1, \dots, n-1$ について加えると,

$$n \begin{vmatrix} \tilde{P}_n(x) & \tilde{P}_{n-1}(x) \\ \tilde{P}_n(y) & \tilde{P}_{n-1}(y) \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)(x-y)\tilde{P}_k(x)\tilde{P}_k(y) \tag{3.52}$$

が成り立つ. ここで $n = J, x = \mu, y = \mu_j$ とすると $\tilde{P}_J(\mu_j) = 0$ より,

$$J\tilde{P}_J(\mu)\tilde{P}_{J-1}(\mu_j) = \sum_{k=0}^{J-1} (2k+1)(\mu - \mu_j)\tilde{P}_k(\mu)\tilde{P}_k(\mu_j). \tag{3.53}$$

よって,

$$\frac{\tilde{P}_J(\mu)}{\mu - \mu_j} = \frac{\sum_{k=0}^{J-1} (2k+1)\tilde{P}_k(\mu)\tilde{P}_k(\mu_j)}{J\tilde{P}_{J-1}(\mu_j)} \tag{3.54}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
 w_j &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{P}_J(\mu)}{(\mu - \mu_j) \tilde{P}'_J(\mu_j)} d\mu \\
 &= \frac{1}{2J \tilde{P}_{J-1}(\mu_j) \tilde{P}'_J(\mu_j)} \sum_{k=0}^{J-1} (2k+1) \tilde{P}_k(\mu_j) \int_{-1}^1 \tilde{P}_k(\mu) d\mu \\
 &= \frac{1}{J \tilde{P}_{J-1}(\mu_j) \tilde{P}'_J(\mu_j)} \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

である。ただし、(3.55) における積分は、 $k=0$ の時のみ 0 でない値を持つこと、および $\tilde{P}_0 = 1$ を使った。さらに、漸化式

$$(1 - \mu^2) \frac{\partial \tilde{P}_n}{\partial \mu} = n \tilde{P}_{n-1}(\mu) - n\mu \tilde{P}_n(\mu) \tag{3.56}$$

で $n = J, \mu = \mu_j$ とする。 $\tilde{P}_J(\mu_j) = 0$ より、

$$w_j = \frac{1 - \mu_j^2}{(J \tilde{P}_{J-1}(\mu_j))^2} \tag{3.57}$$

となる。

STEP3 \tilde{P}_n の規格化

P_n を

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P'_n(\mu) d\mu = 2 \tag{3.58}$$

になるように規格化する。 $\tilde{P}_{J-1} = \sqrt{\frac{1}{2(J-1)+1}} P_{J-1}$ より、

$$w_j = \frac{1 - \mu_j^2}{(J \sqrt{\frac{1}{2J-1}} P_{J-1}(\mu_j))^2} = \frac{(2J-1)(1 - \mu_j^2)}{(J P_{J-1}(\mu_j))^2} \tag{3.59}$$

となる。

まとめ

以上より

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = 2 \sum_{j=1}^J f(\mu_j) w_j, \tag{3.60}$$

$$w_j = \frac{(2J-1)(1 - \mu_j^2)}{(J P_{J-1}(\mu_j))^2} \tag{3.61}$$

3.5 球面調和関数の離散的直交関係

ここでは球面直交関数の離散的直交関係である選点直交性を示す.

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I P_n^m(\mu_j) P_{n'}^{m'}(\mu_j) \exp(im\lambda_i) \exp(-im'\lambda_i) w_j = I \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (3.62)$$

ここで, $i, j, m, m', n, n', I, J, M, N(m)$ は整数で, $1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J, 0 \leq |m|, |m'| \leq M, |m| \leq n \leq N, |m'| \leq n' \leq N$ であり, $M \leq \left\lfloor \frac{I}{2} \right\rfloor, N(m) \leq J-1$ を満たす. また, w_j は Gauss 荷重, $\lambda_i = \frac{2\pi(i-1)}{I}$, μ_j は $P_J(\mu)$ の零点である. $\lfloor \cdot \rfloor$ はそれを越えない最大の整数を表す. これは, 有限な直交多項式系において成り立つ選点直交性と呼ばれる性質である⁹.

この式を証明する. Legendre 関数・陪関数の定義(連続系での)直交性, Gauss の台形公式, Legendre 関数の零点を用いた多項式の積分評価を既知とすると,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I P_n^m(\mu_j) P_{n'}^{m'}(\mu_j) \exp(im\lambda_i) \exp(-im'\lambda_i) w_j \\ &= I \sum_{j=1}^J P_n^m(\mu_j) P_{n'}^{m'}(\mu_j) w_j \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

ここで Gauss の台形公式を使った. 更に変形すると

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I P_n^m(\mu_j) P_{n'}^{m'}(\mu_j) \exp(im\lambda_i) \exp(-im'\lambda_i) w_j \\ &= I \sum_{j=1}^J P_n^m(\mu_j) P_{n'}^{m'}(\mu_j) w_j \\ &= \frac{I}{2} \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^{m'}(\mu) d\mu. \end{aligned} \quad (3.64)$$

ここで, Gauss-Legendre の公式を使った. 更に, 連続系の Legendre 関数・陪関数の直交性より

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I P_n^m(\mu_j) P_{n'}^{m'}(\mu_j) \exp(im\lambda_i) \exp(-im'\lambda_i) w_j \\ &= I \delta_{nn'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (3.65)$$

が得られる. 以上により, 離散化した球面調和関数の選点直交性が示された.

余談ではあるが, 直交多項式系においては離散的な直交関係としては選点直交性のほかに次のような直交関係も知られている¹⁰. $\{f_k(\mu)\} (k=0, 1, 2, \dots)$ を $[a, b]$ で定義された重み $w(\mu)$, 規格化定数 λ_k の直交多項式 $\left(\int_a^b f_k(\mu) f_{k'}(\mu) w(\mu) d\mu = \lambda_k \delta_{kk'} \right)$ とする. $\mu_j, \mu_{j'} (1 \leq j, j' \leq J)$ を $f_J(\mu)$

⁹別の離散的直交関係については後で述べる.

¹⁰以下については, 森, 1984 「数値解析法」が詳しい.

の零点, $w_j = w(\mu_j)$ とすれば, 選点直交性

$$\sum_{j=0}^{J-1} f_k(\mu_j) f_{k'}(\mu_j) w_j = \lambda_k \delta_{kk'} \quad (3.66)$$

のほかに,

$$\sum_{k=0}^{J-1} \frac{f_k(\mu_j) f_k(\mu_{j'})}{\lambda_k} = \frac{1}{w_j} \delta_{jj'} \quad (3.67)$$

が成り立つ.

実際, Legendre 関数 $\{P_n\}(n = 0, 1, 2, \dots, J-1)$ についてはこの関係が成り立つ. すなわち, w_j を GCM で用いている Gauss 荷重として,

$$\sum_{n=0}^{J-1} P_n(\mu_j) P_n(\mu_{j'}) = \frac{1}{w_j} \delta_{jj'} \quad (3.68)$$

である. しかし, GCM では Legendre 関数 P_J の零点でのみ値を計算することと, 波数切断の関係とから, Legendre 陪関数 $\{P_n^m\}(n = |m|, |m|+1, |m|+2, \dots, N)$ の離散的直交関係は意味がない¹¹. Legendre 関数の直交関係についても, 波数切断により P_n は $n = 0, 1, 2, \dots, N < J-1$ しか扱わないので¹² 実際には意味がない.

三角関数についても同様な離散的直交関係がある. 選点直交性

$$\sum_{i=0}^{I-1} \exp(im\lambda_i) \exp(-im'\lambda_i) = I\delta_{mm'} \quad (3.69)$$

のほかに,

$$\sum_{m=-\frac{I}{2}+1}^{\frac{I}{2}} \exp(im\lambda_i) \exp(-im\lambda_{i'}) = I\delta_{ii'} \quad (3.70)$$

も成り立つ. (ただし, I は偶数で $I = 2M$. I が奇数の場合には, $I = 2M + 1$ として, m についての和は $-\frac{I-1}{2} \sim \frac{I-1}{2}$ にとる.) しかし GCM では, 波数切断により $|m|$ の最大値 M は $\frac{I}{3}$ 以下の値なのでやはり意味がない¹³.

3.6 スペクトルの係数と格子点値とのやり取り

ここではスペクトルの係数と格子点値との変換法について述べる. 実際の GCM 計算において必要になるのは

¹¹そもそも, ここで述べている直交関係は $f_k(k = 0, 1, 2, \dots, K-1)$ が k 次多項式であるような直交多項式系において成り立つものである. Legendre 陪関数は m が奇数のときは多項式でないし, m が偶数であっても P_n^m は n 次多項式であって, $n-m$ 次多項式ではない. その場合にも直交多項式の議論を拡張してここで述べている直交関係を使えるのか, については未調査である.

¹²T42 ならば, $m = 0$ で $J = 63, N = 42$, R21 ならば, $m = 0$ で $J = 63, N = 21$, である.

¹³T42 ならば $I = 128$ に対して $M = 42$, R21 ならば $I = 64$ に対して $M = 21$ である.

- スペクトルの係数と格子点値との値のやり取り
- 速度の格子点値の発散 $D \cdot$ 渦度 ζ のスペクトルの係数への変換
- 速度ポテンシャル χ , 流線関数 ψ (もとは 発散, 渦度) のスペクトルの係数から速度の格子点値の作成

である.

3.6.1 スペクトルの係数と格子点値との値のやり取り

スカラー関数 $A(\lambda, \varphi)$ の格子点値とスペクトルの係数とのやり取りは以下のとおりである. ただし, 格子点値は A_{ij} ($i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J$), スペクトルの係数は \tilde{A}_n^m ($m = -M, -M + 1, \dots, M, n = |m|, |m| + 1, \dots, N(m)$) とする.

$$A_{ij} \equiv \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \tilde{A}_n^m Y_n^m(\lambda_i, \varphi_j), \quad (3.71)$$

$$\tilde{A}_n^m = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J A_{ij} Y_n^{m*}(\lambda_i, \varphi_j) w_j, \quad (3.72)$$

$$w_j = \frac{(2J-1)(1-\sin^2 \varphi_j)}{(JP_{J-1}(\sin \varphi_j))^2}. \quad (3.73)$$

以後この文書では簡単のために, $\sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N$ を $\sum_{m,n}$ と, $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J$ を $\sum_{i,j}$ と表記する.

3.6.2 スペクトルの係数と格子点値との値のやり取り ~ 東西微分編

まず,

$$g \equiv \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

を考える.

東西微分 (λ 微分) は次式で評価する.

$$g_{ij} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sum_{m,n} \tilde{f}_n^m Y_n^m(\lambda, \varphi) \right) \right]_{ij}. \quad (3.74)$$

すなわち,

$$g_{ij} = \sum_{m,n} im \tilde{f}_n^m Y_n^m(\lambda_i, \varphi_j) \quad (3.75)$$

である. 変換公式 (3.72) で A を g とみなしたものと (3.75) とを比較すれば明らかに¹⁴,

$$\tilde{g}_n^m = im\tilde{f}_n^m. \quad (3.76)$$

よって,

$$\tilde{g}_n^m = \frac{1}{I} \sum_{i,j} imf_{ij} Y_n^{m*}(\lambda_i, \varphi_j) w_j \quad (3.77)$$

である.

次に,

$$h \equiv \frac{g}{r \cos^2 \varphi} = \frac{1}{r \cos^2 \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \left[= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{\cos \varphi} \right) \right]$$

とする. f と h とのやり取りを考える. (3.74) より明らかに,

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \frac{1}{r \cos^2 \varphi_i} g_{ij} \\ h_{ij} &= \frac{1}{r \cos^2 \varphi_j} \sum_{m,n} im\tilde{f}_n^m Y_n^m(\lambda_i, \varphi_j). \end{aligned}$$

一方, (3.76) より

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n^m &= \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{f}{r \cos^2 \varphi} \right) \right]_n^m = im \left(\frac{f}{r \cos^2 \varphi} \right)_n^m \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i,j} im \left(\frac{f}{r \cos^2 \varphi} \right)_{ij} Y_n^{m*}(\lambda_i, \varphi_j) w_j \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i,j} imf_{ij} Y_n^{m*}(\lambda_i, \varphi_j) \frac{w_j}{r \cos^2 \varphi_j}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

3.6.3 スペクトルの係数と格子点値との値のやり取り ~ 南北微分編

まず,

$$p \equiv \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

を考える.

南北微分 (φ 微分) は次式で評価する.

$$p_{ij} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{m,n} \tilde{f}_n^m Y_n^m \right) \right]_{ij}. \quad (3.79)$$

¹⁴より正確には, $(g_{ij} =) \sum_{m,n} im\tilde{f}_n^m Y_n^m = \sum_{m,n} \tilde{g}_n^m Y_n^m$ の両辺に左から $\sum_{i,j} Y_n^{m*}(\lambda_i, \varphi_j) w_j$ を演算すれば, $im'\tilde{f}_n^{m'} = \tilde{g}_n^{m'}$ として得られる.

すなわち,

$$p_{ij} = \sum_{m,n} \tilde{f}_n^m \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j \exp(im\lambda_i) \quad (3.80)$$

である. よって,

$$\begin{aligned} p_n^m &= \frac{1}{I} \sum_{i,j} p_{ij} Y_n^{m*} w_j \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i,j} \left(\sum_{m',n'} \tilde{f}_{n'}^{m'} \left. \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\varphi} \right|_j \exp(im'\lambda_i) \right) P_n^m(\varphi_j) \exp(-im\lambda_i) w_j \\ &= -\frac{1}{I} \sum_{i,j} \left(\sum_{m',n'} \tilde{f}_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\varphi_j) \exp(im'\lambda_i) \right) \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j \exp(-im\lambda_i) w_j \\ &= -\frac{1}{I} \sum_{i,j} f_{ij} \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j \exp(-im\lambda_i) w_j \end{aligned}$$

となる. ここで, 2 行目から 3 行目の等号では,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_{n'}^{m'} P_n^m(\varphi_j) \exp(im\lambda_i) \left. \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\varphi} \right|_j \exp(-im'\lambda_i) w_j \\ &= -\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_{n'}^{m'} \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j \exp(-im\lambda_i) P_{n'}^{m'}(\varphi_j) \exp(im'\lambda_i) w_j \end{aligned} \quad (3.81)$$

を用いた¹⁵.

次に,

$$q \equiv \cos^2 \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \cos^2 \varphi p$$

¹⁵この証明は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_j f_{n'}^{m'} P_n^m(\varphi_j) \exp(im\lambda_i) \left. \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\varphi} \right|_j \exp(-im'\lambda_i) w_j \\ &= I \sum_j f_{n'}^{m'} P_n^m(\varphi_j) \left. \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\varphi} \right|_j w_j \delta_{mm'} = I \sum_j f_{n'}^{m'} P_n^m(\varphi_j) \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j w_j \delta_{mm'} \\ &= \frac{I}{2} \int_{-1}^1 f_{n'}^{m'} P_n^m(\varphi) \frac{dP_n^m}{d\varphi} d\varphi \delta_{mm'}. \end{aligned}$$

ここで, 部分積分すると

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_j f_{n'}^{m'} P_n^m(\varphi_j) \exp(im\lambda_i) \left. \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\varphi} \right|_j \exp(-im'\lambda_i) w_j \\ &= -\frac{I}{2} \int_{-1}^1 f_{n'}^{m'} P_{n'}^m(\varphi) \frac{dP_n^m}{d\varphi} d\varphi \delta_{mm'} \\ &= -I \sum_j f_{n'}^{m'} P_{n'}^m(\varphi_j) \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j w_j \delta_{mm'} \\ &= -\sum_i \sum_j f_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\varphi_j) \exp(im'\lambda_i) \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j \exp(-im\lambda_i) w_j. \end{aligned}$$

とする.

(3.79) より明らかに,

$$q_{ij} = \cos^2 \varphi_j \sum_{m,n} \tilde{f}_n^m \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j \exp(im\lambda_i)$$

である. 一方,

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n^m &= \frac{1}{I} \sum_{i,j} q_{ij} Y_n^{m*} w_j \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i,j} \left(\cos^2 \varphi_j \sum_{m',n'} \tilde{f}_{n'}^{m'} \left. \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\varphi} \right|_j \exp(im'\lambda_i) \right) P_n^m(\varphi_j) \exp(-im\lambda_i) w_j \\ &= -\frac{1}{I} \sum_{i,j} \left(\sum_{m',n'} \tilde{f}_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\varphi_j) \exp(im'\lambda_i) \right) \\ &\quad \times \left. \frac{d}{d\varphi} (\cos^2 \varphi P_n^m) \right|_j \exp(-im\lambda_i) w_j \\ &= -\frac{1}{I} \sum_{i,j} f_{ij} \left. \frac{d}{d\varphi} (\cos^2 \varphi P_n^m) \right|_j \exp(-im\lambda_i) w_j \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 2 行目から 3 行目において,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_{n'}^{m'} \cos^2 \varphi_j P_{n'}^{m'}(\varphi_j) \exp(im'\lambda_i) \left. \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\varphi} \right|_j \exp(-im'\lambda_i) w_j \\ &= -\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_{n'}^{m'} \left. \frac{d}{d\varphi} (\cos^2 \varphi P_{n'}^{m'}) \right|_j \exp(-im\lambda_i) P_{n'}^{m'}(\varphi_j) \exp(im'\lambda_i) w_j \end{aligned}$$

を用いた¹⁶.

3.6.4 χ, ψ のスペクトルの係数から速度の格子点値への変換

ここでは χ_n^m, ψ_n^m から u_{ij}, v_{ij} を求める方法を記す.

まず,

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \quad (3.82)$$

より,

$$u_{ij} = \sum_{m,n} \left(-\frac{1}{r} \tilde{\psi}_n^m \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j + \frac{1}{r \cos \varphi_j} im \tilde{\chi}_n^m P_n^m(\sin \varphi_j) \right) \exp(im\lambda_i). \quad (3.83)$$

である. 同様に,

$$v = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \quad (3.84)$$

¹⁶この証明は (3.81) の証明と同様である.

より,

$$v_{ij} = \sum_{m,n} \left(\frac{1}{r \cos \varphi_j} im \tilde{\psi}_n^m P_n^m(\sin \varphi_j) + \frac{1}{r} \tilde{\chi}_n^m \left. \frac{dP_n^m}{d\varphi} \right|_j \right) \exp(im\lambda_i). \quad (3.85)$$

である.

3.7 スペクトルの係数同士の関係

ここではスペクトルの係数同士の便利な公式を挙げておく. $g = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ の時

$$\tilde{g}_n^m = im \tilde{f}_n^m. \quad (3.86)$$

$h = \nabla_H^2 f$ の時

$$\tilde{h}_n^m = -\frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{f}_n^m. \quad (3.87)$$

(3.86) については「スペクトルの係数と格子点値とのやり取り」に証明を示した. ここでは, (3.87) について証明しておく.

微分評価の定義より,

$$h_{ij} = \left(\nabla_H^2 \sum_{m,n} \tilde{f}_n^m Y_n^m \right) \Big|_{ij} = - \sum_{m,n} \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{f}_n^m Y_n^m \Big|_{ij}$$

である. ところで,

$$h_{ij} = \sum_{m,n} \tilde{h}_n^m Y_n^m \Big|_{ij}$$

である. この2つの式の右辺に左から $\sum_{i,j} Y_n^{m'*} \Big|_{ij}$ を演算して比較すると,

$$\tilde{f}_{n'}^{m'} = -\frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{h}_{n'}^{m'}$$

を得る.

3.8 波数切断

GCM では, 物理量を球面調和函数 $P_n^m(\sin \varphi) \exp(im\lambda)$ で展開したり波数空間で計算するとき, 計算資源の都合上, ある一定波数以下の波数のみを考慮して計算する. そのことを波数切断するという¹⁷. 以下ではまず, 切断の基礎知識として切断の仕方・流儀を述べ, ついで, 切断における事情を述べた上で切断波数の決め方を記す.

¹⁷後述するように, 現実的には波数切断を決めると同時に格子点数が決まる. すなわち, 以上の理由は格子点数を大きくとれないことのも理由でもある.

3.8.1 波数切断の仕方

波数切断の仕方については、東西波数 (m)、南北波数 ($n - m$) のそれぞれの切断の方法にいくつかの流儀がある。一般によく用いられるものは三角形切断 (Triangle)、平行四辺形切断 (Rhomboidal: 偏菱形) と呼ばれるものである。三角形切断の場合について計算する波数領域を波数平面上に書くと (3.1) のようになる。平方四辺形切断の場合は、(3.2) である。

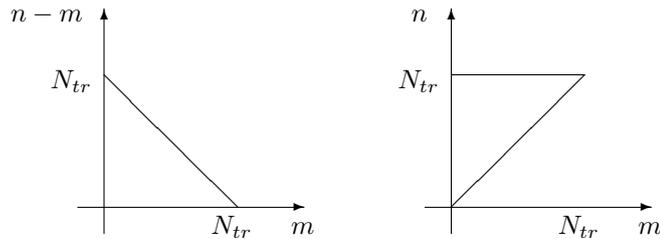


図 3.1: 三角形切断の場合の波数領域

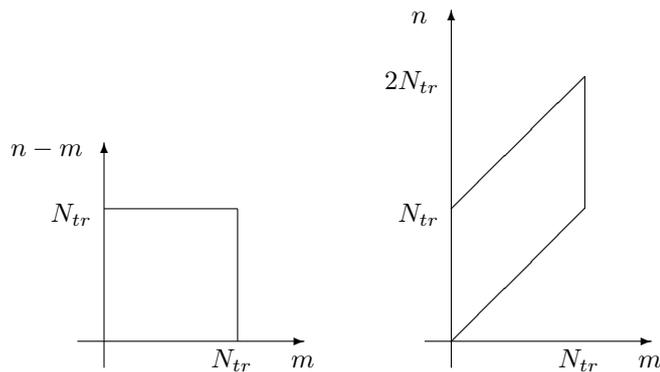


図 3.2: 平方四辺形切断の場合の波数領域

三角形切断, 平行四辺形切断, という名称は波数平面上 ((n, m) 平面) での形状による¹⁸.

より一般的な切断方法は五角形切断 ((3.3)) である。

三角形切断, 平行四辺形切断はそれぞれ, 五角形切断において

- 三角形切断 $J = K = M = N_{tr}$
- 平行四辺形切断 $K = 2N_{tr}, J = M = N_{tr}$

¹⁸平方四辺形切断には、 n の最大値を m の最大値の 2 倍にしないようなとり方もある。詳しくは五角形切断に関する脚注参照。

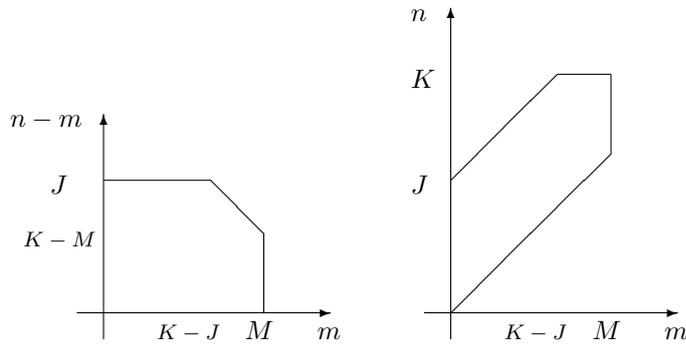


図 3.3: 五角形切断の場合の波数領域

であるような特別な場合である¹⁹。

三角形切断と平行四辺形切断の違いについて、世の中では次のように言われている²⁰。

- 三角形切断の水平分解能は、経度方向のみならず緯度方向にも一定である²¹。分解能を上げてスケールの細かい波を表現できるようになった場合を考える。物理的にスケールの小さい波には指向性がないこと、水平分解能に方向依存性がないことは調和的である。また、このことは、ある三角形波数切断した球面調和函数により表現される球面上の分布は極の位置を変えても同じ三角形波数切断した球面調和函数により正確に表現されることの言い替えでもある。
- 平行四辺形切断の場合、各東西波数について同じだけの南北波数をとれる。

3.8.2 切断波数の決め方

ここでは切断波数と南北格子点数の決め方について記す。これらは切断の仕方を決めた後に、使用する計算資源がネックになって決まる。その際、FFT の仕様、aliasing の回避、という 2 つの数値的な事情を考慮した上で決める必要がある。

FFT の仕様の事情というのは、話は簡単で、東西方向に「格子 \leftrightarrow スペクトル」変換するために用いる FFT が効率よく動くための格子点数・波数がある²² ことである。

一方、aliasing に関する事情は複雑である。ここで扱っているスペクトルモデルでは、格子点でのみ

¹⁹単に $K = J + M$ であるものも平行四辺形切断と呼ばれる。だが、例えば R21 と呼ばれるものは、 $K = 42, J = M = 21$ のものである。

²⁰気象庁予報部, 1982 の p.47 より。

²¹分解能が緯度方向に変化することについては、平行四辺形切断に限らず、三角形切断以外のどれでも起こる。

²²コード依存性がある。通常、2 のべき乗が好ましいとされる。コードによっては、2,3,5 のべき乗の積でもよいものもある。

値を計算している。いわゆるスペクトルを使うのは、単に格子点上での水平微分項の評価をする時のみである。その意味で、「微分の評価にのみスペクトルを用いるグリッドモデル」と言ってもよい。そのように受け止めると、格子点値を”正しく”計算することを目指し、また、考慮する波数は厳密にスペクトルの係数と格子との変換を行なうことのできる波数、すなわち変換において情報の落ちないだけの波数をとらねばならないように思える。ところが実際には、スペクトルモデル的な配慮 — ある波数以下についてのみ正しく計算し、それ以上の波数については計算しない — により切断波数・格子点数が決められている。また、後述する理由により情報は (非線形 aliasing のことを考えずとも) 必ず落ちてしまうのである²³。

さて、以下では aliasing に関する事情を具体的に述べながら、切断波数に対する格子点数の決め方を記そう。球面上に連続分布している物理量を球面調和関数で展開する。ある波数 $M, N(m)$ 以下 (例えば, T42 ならば $M = 42, N = 42$) については線形項・非線形項の両方について厳密に計算できるように I, J を決めることを目指す。

M, N を仮に固定したとして、まずは線形項について切断波数以下のスペクトルの係数のわかっている物理量 A を格子点値に変換しさらにスペクトルの係数に正しくもどすことを考える。 A は $-M \leq m \leq M, |m| \leq n \leq N(m)$ の m, n については \tilde{A}_n^m がわかっているとす。格子点値は、 $1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J$ について

$$A_{ij} \equiv \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \tilde{A}_n^m P_n^m(\sin \varphi_j) \exp(im\lambda_i) \quad (3.88)$$

で与えられる。これらの格子点値から逆に $\tilde{A}_n^m (-M \leq m \leq M, |m| \leq n \leq N)$ を計算する。離散化した系での積分を Gauss の公式, Gauss-Legendre の公式で評価すれば、

$$\tilde{A}_n^m = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J A_{ij} P_n^m(\sin \varphi_j) \exp(-im\lambda_i) w_j \quad (3.89)$$

である。ここで、 w_j は φ_j における重みである。 A_{ij} の定義を代入すれば、

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n^m &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\sum_{m'=-M}^M \sum_{n'=|m'|}^N \tilde{A}_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\sin \varphi_j) \exp(im'\lambda) \right) P_n^m(\sin \varphi_j) \exp(-im\lambda_i) w_j \\ &= \frac{1}{I} \sum_{m'=-M}^M \sum_{n'=|m'|}^N \tilde{A}_{n'}^{m'} \sum_{i=1}^I \exp(i(m' - m)\lambda) \sum_{j=1}^J P_n^m(\sin \varphi_j) P_{n'}^{m'}(\sin \varphi_j) w_j \end{aligned} \quad (3.90)$$

となる。この計算が \tilde{A}_n^m を正しく評価している (すなわち元にもどる) ための I, J の条件は、

²³実際の GCM では格子点値からスペクトルに変換する際に情報は落ちている。したがって、格子 - スペクトル - 格子という変換を行なうと元にはもどらない。

例えば T42 の場合、自由度は $1 + (2 \times 1 + 1) + \dots + (2 \times 42 + 1) = 43^2 = 1849$ に対して格子点数は $128 \times 64 = 8192$ である。R21 の場合も、自由度は $(2 \times 21 + 1) \times (21 + 1) = 946$ に対して、格子点数は $64 \times 64 = 4096$ である。すなわち、3/4 以上の情報は格子点値からスペクトルに変換するときに落ちている。

工夫すれば情報が落ちないうまい方法があるかも知れないが、今のところ見つけていないし多分見つからない。

もちろん、スペクトル - 格子 - スペクトルという変換では元にもどる (ように決めている)。

$-M \leq m \leq M, |m| \leq n \leq N$ を満たす m, n について

$$\sum_{i=1}^I \exp(i(m' - m)\lambda) = I\delta_{mm'}, \quad (3.91)$$

$$\sum_{j=1}^J P_n^m(\sin \varphi_j) P_{n'}^m(\sin \varphi_j) w_j = \delta_{nn'} \quad (3.92)$$

が成り立つことである。三角関数の和による評価が正しいための条件は、ここに登場する波数 $|m' - m|$ が最大で $2M$ の値をとるので、Gauss の公式の適用条件より、格子点数 I が $I \geq 2M + 1$ を満たすことである。Legendre 関数の積の和による評価が正しいための条件は、ここに登場する計算が $n + n'$ 次の多項式²⁴ の評価であることから、Gauss - Legendre の公式の適用条件より、格子点数 J が $2J - 1 \geq \max[n + n'] = 2\max[N]$ を満たすことである。ここで、 $\max[n + n']$ は $n + n'$ の最大値を、 $\max[N]$ は N の最大値を表す。

ちなみに、格子点値からスペクトルの係数に変換し格子点値にもどすという立場からすれば、この Gauss-Legendre の公式の適用条件というのが情報を落とさずには済まない理由である²⁵。このことを以下に述べる。情報を落とさずに格子点値をスペクトルの係数に変換し格子点値にもどすには、あらゆる東西波数について南北方向の格子点数 J と同じだけの個数の Legendre 関数が必要である。東西波数 m の場合、登場する Legendre 陪関数の n は $n = |m|, |m| + 1, \dots, |m| + J - 1$ である。 $P_n^m P_{n'}^m$ の次数は $n + n'$ であるから、最大で $2J + 2|m| - 2$ である。これが $2J - 1$ 以下になるのは $m = 0$ の時のみである。 $m \neq 0$ の場合は高次の Legendre 関数は計算してはならない。つまり情報を落とさざるをえない²⁶。

改めて M, N を固定するという立場にもどって、切断波数以下のスペクトルの係数のわかっている物理量 B, C の積からそれらの格子点値を用いて B と C との積 (非線形項) A のスペクトルの係数を正しく求めるための I, J の条件を考える。

$$A = BC, \quad (3.93)$$

$$B = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \left(\tilde{B}_n^m \exp(im\lambda) \right) P_n^m(\sin \varphi), \quad (3.94)$$

$$C = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \left(\tilde{C}_n^m \exp(im\lambda) \right) P_n^m(\sin \varphi) \quad (3.95)$$

なる物理量 A, B, C があるとする²⁷。 B, C の $-M \leq m \leq M, |m| \leq n \leq N$ におけるスペクトルの係数 $\tilde{B}_n^m, \tilde{C}_n^m$ を用いて A のスペクトルの係数 \tilde{A}_n^m を $0 \leq m \leq M, |m| \leq n \leq N$ については正しく計算することを考える。

²⁴ここで、三角関数の和が $I\delta_{mm'}$ となることを用いた。一般には (m, m') の偶奇が一致しない場合には $P_n^m P_{n'}^{m'}$ は多項式にならない。

²⁵Gauss の公式の適用条件と情報欠落との関係についてコメントしておく。格子点数 I が奇数の場合には、スペクトルで同じ情報量を持つためには波数 $\frac{I-1}{2}$ までを考慮すればよいので、情報は欠落しないことは明らかである。一方、 I が偶数の場合には、情報は欠落させないためには波数 $\frac{I}{2}$ が必要であるが、この波数は Gauss の公式の適用条件を満たさない。しかしこの場合にも、(私は根拠を調べていないが、少なくとも) 経験的には FFT および 逆 FFT によって格子 - スペクトル - 格子変換によって情報が落ちないことが知られている。

²⁶この事情により、非線形項の場合を考えてさらに著しく落とすことが必要になることが次節からわかる。

²⁷ A, B, C とともに実数である。すなわち、 $\tilde{B}_n^m = \tilde{B}_n^{m*}, etc.$ となっている。

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_n^m &\equiv \widetilde{(BC)}_n^m \\
&= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{ij} C_{ij} P_n^m(\sin \varphi_j) \exp(-im\lambda_i) w_j \\
&= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\sum_{m'=-M}^M \sum_{n'=|m'|}^N \tilde{B}_{n'}^{m'} \exp(im'\lambda_i) P_{n'}^{m'}(\sin \varphi_j) \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{m''=-M}^M \sum_{n''=|m''|}^N \tilde{C}_{n''}^{m''} \exp(im''\lambda_i) P_{n''}^{m''}(\sin \varphi_j) \right) P_n^m(\sin \varphi_j) \exp(-im\lambda_i) w_j \\
&= \frac{1}{I} \sum_{m'=-M}^M \sum_{n'=|m'|}^N \sum_{m''=-M}^M \sum_{n''=|m''|}^N \tilde{B}_{n'}^{m'} \tilde{C}_{n''}^{m''} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^I \exp(i(m' + m'' - m)\lambda_i) \sum_{j=1}^J P_{n'}^{m'}(\sin \varphi_j) P_{n''}^{m''}(\sin \varphi_j) P_n^m(\sin \varphi_j) w_j. \quad (3.96)
\end{aligned}$$

この計算が \tilde{A}_n^m を $0 \leq m \leq M$, $|m| \leq n \leq N$ について正しく評価しているための, I, J の条件を線形項の場合と同様に考えると, 格子点数 I が $I \geq 3M + 1$ を, 格子点数 J が $2J - 1 \geq \max[n + n' + n''] = 3\max[N]$ を満たすことである. ここで, $\max[n + n' + n'']$ は $n + n' + n''$ の最大値を, $\max[N]$ は N の最大値を表す.

再び格子点値からスペクトルの係数に変換し格子点値にもどすという立場からすれば, これらの I, J に関する条件から, 南北成分のみならず, 東西成分についても変換によって情報が落ちてしまうことがわかる.

これまでに述べた M, N を固定したときに格子点数 I, J がとらねばならない個数について, 線形項・非線形項の2つの場合のうち条件が厳しいのは, 明らかに非線形項の場合である. この条件以下の格子点数しかとらない場合には, aliasing をおこすことになる.

以上, FFT, aliasing という2つの事情を考えて格子点数と切断波数とは同時に決められる. 具体的手順は以下のとおりである.

1. 波数切断の仕方を決める.
2. FFT のかけやすい数を選ぶ. それを東西格子点数 I とする.
3. 東西方向の波数の最大値 M を $M = \left\lfloor \frac{I-1}{3} \right\rfloor$ にする. ただし $\lfloor \cdot \rfloor$ はそれを越えない最大の整数を表す記号である.
4. 最大全波数 N_{\max} を決める. 三角形切断ならば $N_{\max} = M$, 平行四辺形切断ならば $N_{\max} = 2M$ である.
5. 南北方向の格子点数 J を $J \geq \frac{3N_{\max}+1}{2}$ を満たす数に選ぶ. (dcpam4 では偶数でなくてはならない.)

例えば, T42 の場合には $M = 42, N = 42$, 東西格子点数 I が 128, 南北格子点数 J が 64 である. R21 の場合には $M = 21, N = 42$, 東西格子点数 I が 64, 南北格子点数 J が 64 である.

参考までに, 線形モデルの場合について決め方を示しておく.

1. 波数切断の仕方を決める.
2. FFT のかけやすい数を選ぶ. それを東西格子点数 I とする.
3. 東西方向の波数の最大値 M を $M = \left\lfloor \frac{I}{2} \right\rfloor$ にする. ただし $\lfloor \cdot \rfloor$ はそれを越えない最大の整数を表す記号である²⁸.
4. 最大全波数 N_{\max} を決める. 三角形切断ならば $N_{\max} = M$, 平行四辺形切断ならば $N_{\max} = 2M$ である.
5. 南北方向の格子点数 J を $J \geq \frac{2N_{\max}+1}{2}$ を満たす数に選ぶ.

例えば, 三角形切断の場合には, $I = 128$ とすると, $M = 64, N = 64, J = 65$ となる. つまり T64 では $I = 128, J = 65$ である. 平方四辺形切断の場合には, $I = 64$ とすると, $M = 32, N = 64, J \geq 65$ となる. つまり R32 では $I = 64, J = 65$ でよい²⁹.

3.9 スペクトルモデルと差分モデル

世の中の多くの GCM の離散化の方法としては, 鉛直方向については必ずレベルと称する差分による離散化を行なうが, 水平方向については, 差分する方法 (この方法を用いるモデルをグリッドモデルという) と球面調和函数で展開してその係数の時間変化を計算する方法 (力学過程において³⁰ この方法を用いるモデルをスペクトルモデルという) とが用いられる. その二つの方法については一長一短がある. ここでは双方の特徴について列挙しておく³¹.

- スペクトルモデルには水平空間差分の誤差がない. これが位相の遅れがないことに通じる (らしい).
- もっとも, グリッド間隔 1.875 度 (波数 63 相当) 以上では, 格子点モデルでの差分誤差も十分小さくなり, ほぼ等しい性能といえる.
- 極は特異点であり, 単純には扱えない³². スペクトルモデルではうまく関数系を選ぶことで困難を回避できる. 格子点法では数値的な技巧が必要である (らしい).

²⁸ここで, I が偶数のときについては Gauss の公式の適用条件を越えて最大波数 $\frac{I}{2}$ まで計算できるという知識を用いた.

²⁹これらの場合でも, 南北方向の細かい情報は格子 - スペクトル - 格子変換によって落ちていることに注意せよ.

³⁰adjustment 等の意味をなど考えると, 特に物理過程においては, 格子点で考える方が物理的に当然であるように思う. そのためであろうか, スペクトルモデルである東大版 GCM でも物理過程を格子点で計算している. 他のスペクトルモデルについてもそうであるかどうかは未調査.

³¹出典は, スペクトル法による数値予報 (その原理と実際) (1.6)

³²問題点その 1. グリッドモデルでは緯度経度図で等間隔に格子点をとると, 極でも CFL を満たすようにするために, 時間差分を細かくしなければならない. 他は未調査.

- 保存量を作ることは出力結果の解釈に使いやすいという物理的な理由と、数値的な発散をおさえやすいという数値的な理由とにより奨励される。格子点モデルの場合、技巧を用いることで保存を維持できる。スペクトルモデルの場合、さほどの技巧を用いることなく保存を維持できる。
- 格子点モデルには非線形不安定がある (aliasing)。
- スペクトルモデルの方が、空間微分を含まないだけプログラムが簡単になる。
- スペクトル法はグリッド法よりも境界条件の点で柔軟でない。
- スペクトルモデルはグリッドモデルに比べて水蒸気等の局地的な現象の表現には適さないとされる。もっとも、グリッドのあらい格子点モデルではスペクトルモデルに比べてさして優れているとはいえない。
- スペクトルモデルでは一点の影響が (本来は影響が及ばない) 遠く離れた点にも与えられてしまう。
- FFT を用いると、少なくともある程度の解像度までは、スペクトルモデルの方が格子点モデルよりも速い (らしい)。

ちなみに、dcpam4 はスペクトルモデルに分類される。

3.10 参考文献

気象庁予報部, 1982 : スペクトル法による数値予報 (その原理と実際) . 気象庁, 111pp.

森口, 宇田川, 一松編, 1956 : 岩波数学公式 I . 岩波書店, 318pp.

森口, 宇田川, 一松編, 1960 : 岩波数学公式 III . 岩波書店, 310pp.

一松 信, 1982 : 数値解析. 朝倉書店, 163pp.

森 正武, 1984 : 数値解析法. 朝倉書店, 202pp.

寺沢寛一, 1983 : 自然科学者のための数学概論 (増訂版) . 岩波書店, 711pp.

第 4 章

使用上の注意とライセンス規定

4.1 ライセンス規定

COPYRIGHT¹ を参照ください。

4.2 使用上の注意

dcpam4 は研究・教育の場で用いられることを前提としております。教育現場においては自由に使用・改変・再配布していただいて結構です。利用する場合には 正式なライセンス規定に従って頂くようお願いします。

dcpam4 を利用して得られた科学技術的成果を論文や Web 等にて発表する際には、その旨を記し、リファレンスに挙げて頂きますようお願いします。

引用例 (和文)

森川 靖大, 石渡 正樹, 土屋 貴志, 山田 由貴子, 高橋 芳幸, 小高 正嗣, 堀之内 武, 林 祥介, DC-PAM 開発グループ, 2007: 惑星大気モデル DCPAM, <http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/>, 地球流体電脳倶楽部。

引用例 (英文)

Morikawa, Y., Ishiwatari, M., Tsuchiya, T., Yamada, Y., Takahashi, O. Y., Odaka, M., Hori-nouchi, T., Hayashi, Y.-Y., DCPAM Development Group, 2007: DCPAM: planetary atmosphere model, <http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/>, GFD Dennou Club.

¹http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam4/dcpam4_current/COPYRIGHT

4.3 開発グループメンバー

4.3.1 2007 年度

プログラム製作

森川 靖大, 石渡 正樹

プログラム製作協力

土屋 貴志, 山田 由貴子, 高橋 芳幸, 小高 正嗣, 堀之内 武, 林 祥介

解説文書作成

石渡 正樹, 森川 靖大